

EXPLORANDO GEOMETRIA COM *ORIGAMI*

Eduardo Cavacami
Yolanda Kioko Saito Furuya
Departamento de Matemática
Universidade Federal de São Carlos

2009

Sumário

1	Introdução	1
1.1	As construções e os Axiomas de Huzita-Hatori	2
2	Secções de segmentos	7
2.1	Construção de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ a partir do quadrado	7
2.2	Construção de $\frac{1}{n}$ a partir do retângulo	11
3	Trissecção do ângulo	14
4	Quadrados e Áreas	17
4.1	Proporção $\frac{1}{2}$ da área	17
4.2	Proporção $\frac{1}{n}$ da área	19
5	Quadratura do Retângulo	22
6	Duplicação do cubo	26
7	Pentágono e retângulo áureo	28
8	Poliedros de Platão de faces triangulares	36
8.1	Retângulos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$	36
8.2	Construção das unidades	41
8.2.1	Unidade A	41
8.2.2	Unidade B	44

8.3	Montagem dos poliedros	46
8.3.1	Tetraedro	47
8.3.2	Octaedro	48
8.3.3	Icosaedro	51
8.4	Esqueleto do Icosaedro	54
9	Poliedro de Platão de faces quadradas	56
10	Poliedro de Platão de faces pentagonais	59
10.1	Do copo ao pentágono regular	59
10.2	Dodecaedro	65
10.2.1	Construção do retângulo para o dodecaedro de aresta dada	67
11	Construções que se encaixam	70
	Referências Bibliográficas	72

1

Introdução

As primeiras aplicações da Geometria de que se tem notícia apareceram em problemas relacionados com divisão de suas terras e na Astronomia. Desde então o uso da Geometria é uma constante na vida do homem e hoje o seu estudo é inserido no ensino da Matemática desde os primeiros anos escolares. No entanto, é notório a dificuldade no aprendizado e a falta de motivação no estudo da Geometria.

A aplicação de *Origami* no ensino da Geometria pode auxiliar no desenvolvimento cognitivo, trazendo assim uma melhor aprendizagem e compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel.

O *Origami*, de origem desconhecida, tem etimologia japonesa e significa dobrar (*ori*) papel (*kami*). No Brasil, utiliza-se também a palavra *dobradura*, mas o termo *Origami* é mundialmente reconhecido e utilizado.

Este trabalho trata do relacionamento entre a Geometria e o *Origami*, através da implementação de dobraduras para apresentação de resultados da Geometria e o uso da Geometria para justificar as construções. Com isto estamos lidando com mais uma metodologia de ensino e estudo da Geometria Elementar, com o uso de uma técnica milenar, concreta e divertida, além de acessível a qualquer pessoa.

Inicialmente apresentamos alguns problemas clássicos da Geometria Euclidiana, incluindo a resolução com *Origami* de dois problemas não solúveis com régua e compasso: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Depois passamos aos poliedros de Platão, construídos através de módulos de *Origami* que se encaixam uns aos outros, formando as faces.

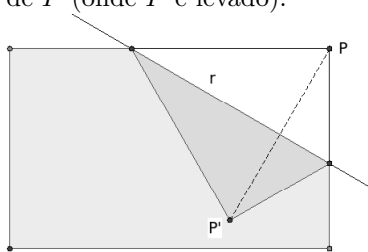
Este texto foi baseado principalmente no trabalho de Hisashi Abe, do

seu livro “*Sugoizô¹ Origami*”, de 2003 (em japonês, [1]). Hisashi Abe, da Universidade de Hokaido, é o autor da construção da trisecção do ângulo apresentada neste texto.

Para um melhor aproveitamento das informações obtidas neste trabalho, espera-se um conhecimento básico em Geometria Elementar.

1.1 As construções e os Axiomas de Huzita-Hatori

Apesar de existirem técnicas de origami dobrando linhas curvas² além das retas, este trabalho se restringirá às dobras em linha reta. Cada dobra efetuada gera uma linha reta e os pontos de um dos semiplanos são refletidos no outro semiplano, ou seja, se r é a linha de dobra, e P é um ponto da folha a ser dobrada, P é levado no seu simétrico P' em relação a r . Ou seja, a linha de dobra r é a mediatriz de cada par P, P' , onde P' é o refletido de P (onde P é levado).



Além disso, a linha de dobra r também é a bissetriz de cada ângulo $\widehat{PVP'}$ formado por um raio VP com origem V em r e seu raio refletido VP' , onde o raio é levado.

Com isso, vê-se que mediatrizes e bissetrizes são construções elementares com *Origami*, assim como perpendiculares e paralelas.

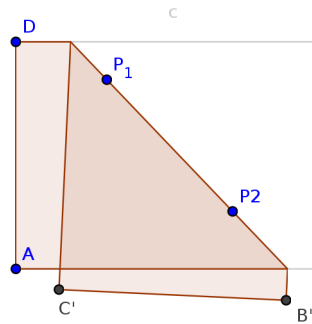
¹Sugoizô=Impressionante

²Como, por exemplo, na construção da *Rosa de Kawasaki*.

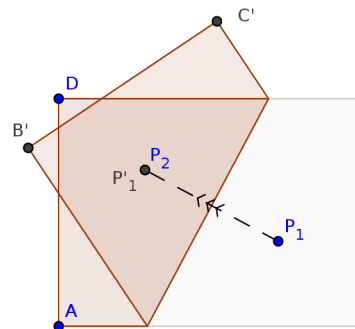
Construções elementares não serão detalhadas todas as vezes que forem utilizadas, para não desviar a atenção da construção central.

Todas as construções utilizadas no texto são consequências dos Axiomas da Geometria do Origami, conhecidos como os Axiomas de Huzita (ou Huzita-Hatori, ou Huzita-Justin), que podem ser obtidos no seguinte endereço eletrônico, de Robert Lang: <http://www.langorigami.com/science>, e dadas a seguir:

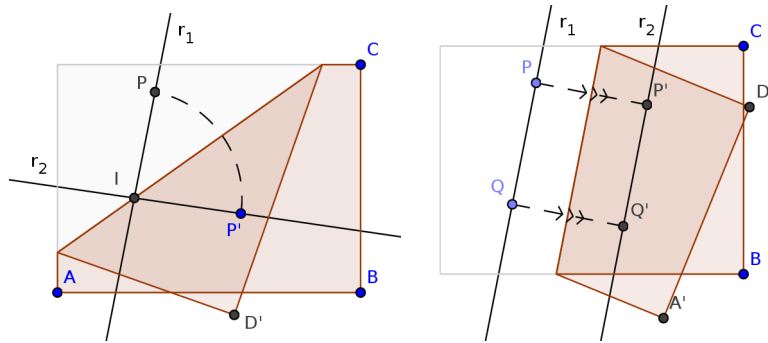
1. *Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que passa por eles;*



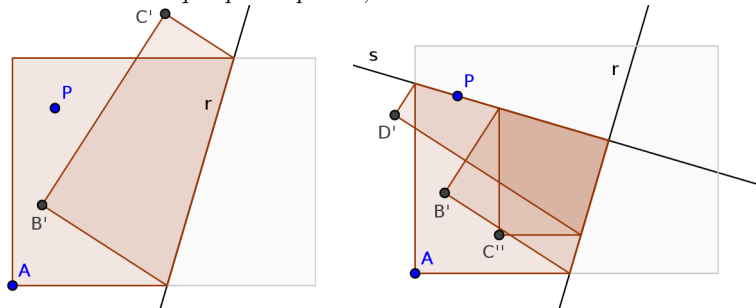
2. *Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que coloca P_1 sobre P_2 ;*



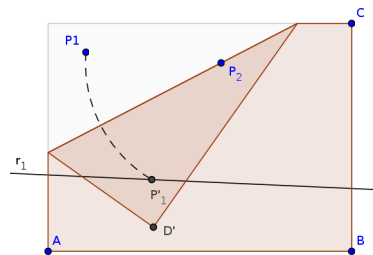
3. *Dadas as retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca r_1 sobre r_2 ;*



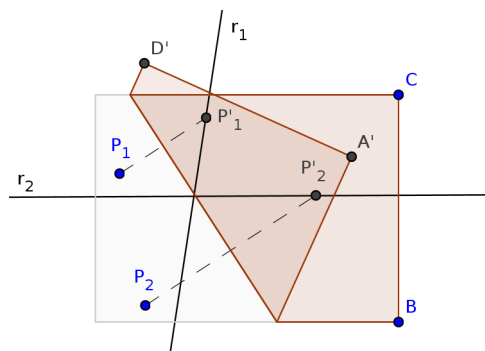
4. Dados um ponto P e uma reta r , existe uma dobra única que é perpendicular a r e que passa por P ;



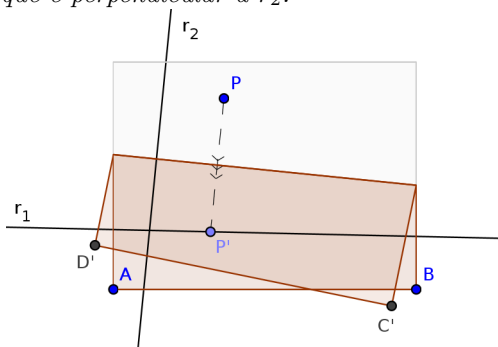
5. Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1 , existe uma dobra que passa coloca P_1 sobre r_1 e que passa por P_2 ;



6. Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2 ;



7. Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2 , existe uma dobra que coloca P_1 sobre r_1 e que é perpendicular a r_2 .



Nesta axiomática, o papel tem o tamanho suficientemente grande para conter todas as construções necessárias (suponha-o ilimitado). Além disso, por “existe uma dobra” entende-se que se a solução geométrica existir, então pode ser realizada através de uma dobra.

Por exemplo, a quantidade de soluções do Axioma 5 pode ser 0, 1 ou 2, dependendo da posição dos pontos e da reta, pois o problema é equivalente a encontrar a intersecção da reta r_1 com a circunferência de centro P_2 passando por P_1 .

Não há garantia de independência entre os axiomas. Mas pode-se

garantir que o sexto axioma (de Humiaki Huzita) não é consequência dos cinco primeiros, pois os cinco primeiros geram somente construções possíveis com régua e compasso e, com o sexto axioma, podemos obter resultados não construtíveis com régua e compasso como veremos adiante.

O sétimo axioma, acrescentado por Koshiro Hatori em 2001 e supostamente independente dos cinco primeiros, deixa uma dúvida:

Observe na construção geométrica do Axioma 7, que o ponto P é levado em $P' \in r_1$. Ora PP' deve ser paralelo a r_2 para que a dobra seja perpendicular a r_2 . Assim, efetuando os seguintes passos:

- *Dobre perpendicularmente a r_2 por P obtendo como vinco a reta s_1 (Axioma 4).*
- *Dobre perpendicularmente a s_1 por P obtendo s_2 (Axioma 4). Chame o ponto em $r_1 \cap s_2$ de P' .*
- *Dobre levando o ponto P a P' (Axioma 2), obtendo a reta ℓ .*

temos que a reta ℓ é a mediatriz de PP' e portanto, é perpendicular a $r_2 \parallel PP'$. Assim, a construção do Axioma 7 é consequência dos axiomas 4 e 2. Ou seja, o Axioma 7 decorre dos cinco primeiros axiomas de Huzita. Pergunta-se: existe algum “furo” nesta argumentação? O fato é que a dobra do Axioma 7 pode ser construída com um único movimento, o de deslizar um ponto Q de r_2 , mais distante que P de r_1 , sobre r_2 até que P encontre r_1 .

Um estudo mais avançado, de Robert J. Lang, sobre estes axiomas e construções geométricas com *Origami* pode ser obtido gratuitamente em http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf (em inglês). Nele é demonstrado inclusive a completude do conjunto de axiomas, isto é, que não há mais axiomas a se acrescentar. E tal estudo é feito com o envolvimento de outra grande área da Matemática: a *Álgebra*.

2

Secções de segmentos

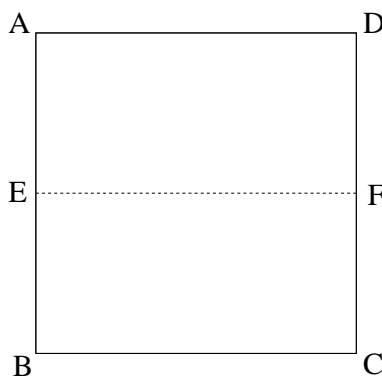
Como podemos facilmente determinar o ponto médio de um segmento através do *Origami*, podemos também dividir um segmento em 2^n partes, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Com régua e compasso, os gregos dividiam segmentos em n partes. Veremos agora que com o *Origami* também é possível essa secção.

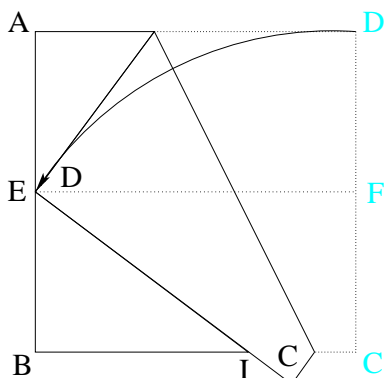
A secção áurea do segmento será trabalhada em momento oportuno, na construção de pentágonos.

2.1 Construção de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ a partir do quadrado

Para se obter uma triseccão de segmento a partir de um quadrado, procedemos da seguinte maneira:

*Seja dado um quadrado ABCD.
Suponha-o de lado igual a 1.
Encontre os pontos médios E e F dos lados AB e CD, respectivamente.*



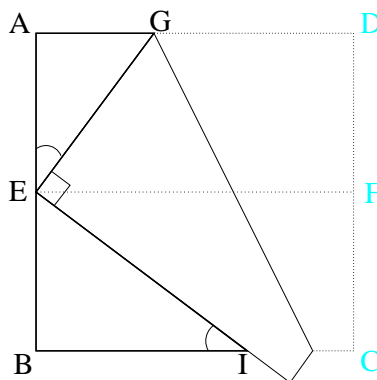


Leve o vértice D ao ponto E .
O novo segmento CD determina sobre o antigo BC um ponto I .
Temos que \overline{IC} , depois de aberto, equivale a $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado $ABCD$.

A demonstração segue por semelhança de triângulos:

Os ângulos \widehat{AEG} e \widehat{BEI} são complementares, pois \widehat{GEI} é reto por ser o refletido de \widehat{GDC} que é reto.

Os triângulos $\triangle GAE$ e $\triangle EBI$ são retângulos. Como \widehat{AEG} é complementar de \widehat{BEI} , então \widehat{AEG} é congruente à \widehat{BIE} . Como os triângulos são retângulos e possuem um dos ângulos congruentes, eles são semelhantes.



Denominaremos agora por x e y os segmentos AG e BI , respectivamente. Como G é um ponto entre A e D , $\overline{GD} = \overline{GE} = 1 - x$. Temos também que $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{1}{2}$.

Por Pitágoras, temos no triângulo $\triangle GAE$:

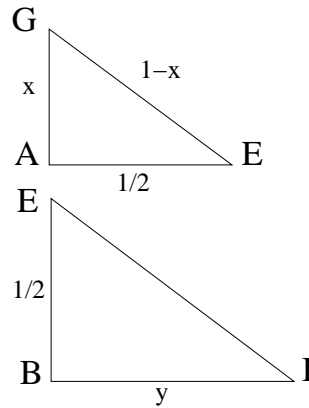
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = (1 - x)^2 \implies \frac{1}{4} + x^2 = 1 - 2x + x^2 \implies x = \frac{3}{8}$$

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} \implies \frac{3}{8} \cdot y = \frac{1}{4} \implies y = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$\overline{IC} = 1 - y = \frac{1}{3}.$$



No *Origami* também é possível dividir um segmento em cinco partes.

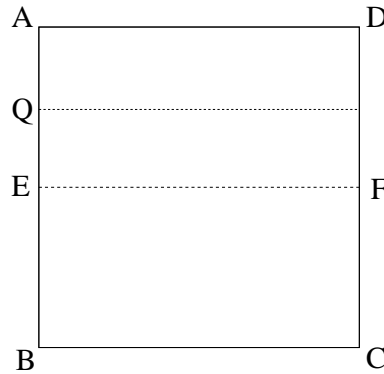
Vejamos:

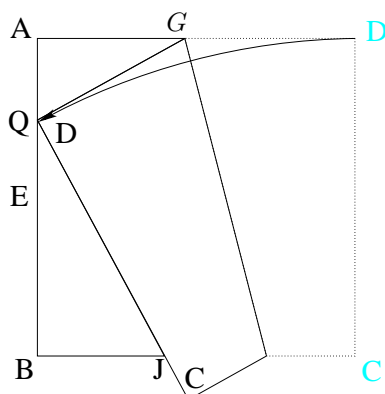
Comece com um quadrado $ABCD$ de lado 1.

Encontre o ponto médio E de AB .

Encontre, então, o ponto médio Q entre A e E .

Temos que $\overline{AQ} = \frac{1}{4}$, donde $4 \cdot \overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AE} = 2 \cdot \overline{EB} = \overline{AB}$





Leve o vértice D ao ponto Q , determinando J em BC .

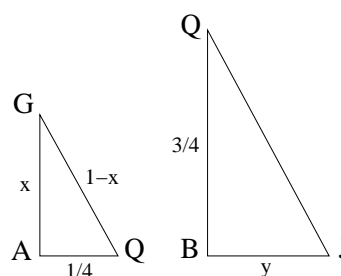
Verifica-se, assim como no caso da trisseção do segmento, dois triângulos semelhantes, $\triangle AGQ$ e $\triangle BQJ$, pelos mesmos motivos do outro caso.

Temos que $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BJ}$.

De fato, nos triângulos semelhantes,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BJ}} = \frac{\overline{GQ}}{\overline{DQ}}$$

Sejam $x = \overline{AQ}$ e $y = \overline{BJ}$.



Temos por Pitágoras que:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + x^2 = (1-x)^2 \implies \frac{1}{16} + x^2 = 1 - 2x + x^2 \implies x = \frac{15}{32}$$

Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\frac{15}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{y} \implies \frac{15}{32}y = \frac{3}{16}$$

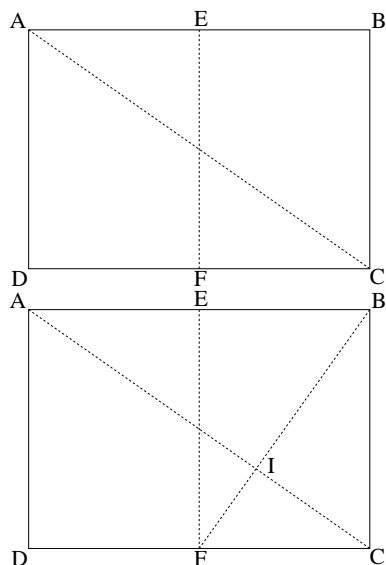
$$y = \frac{2}{5}$$

Obtido $\frac{2}{5}$ do segmento, basta dividir por 2 para conseguir $\frac{1}{5}$.

2.2 Construção de $\frac{1}{n}$ a partir do retângulo

Existe uma forma mais generalizada de se dividir por n partes, não necessitando o papel ser quadrado. Podemos começar com qualquer papel retangular.

Vamos refazer a divisão do segmento no caso $n = 3$ e $n = 5$.



Seja dado um papel retangular qualquer $ABCD$. Dobre uma das diagonais e depois ao meio pelo lado maior, determinando os pontos E e F , pontos médios dos respectivos segmentos AB e DC .

No retângulo $EBCF$ que representa a metade do retângulo $ABCD$, dobre sua diagonal BF , encontrando o ponto I , intersecção da diagonal maior com a menor.

Os triângulos $\triangle ABI$ e $\triangle CFI$ são semelhantes, pois os ângulos do vértice em comum são congruentes, opostos pelo vértice e os outros ângulos são alternos internos.

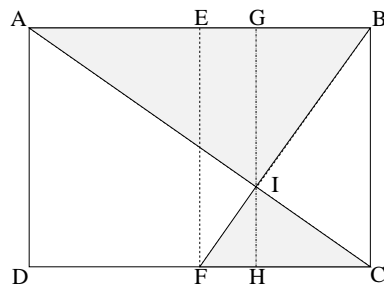
Temos então que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{2}{1}.$$

e portanto, a diagonal AC está dividida em três partes iguais.

Dobre uma perpendicular a AB , passando pelo ponto I e obtenha o ponto $G \in AB$.

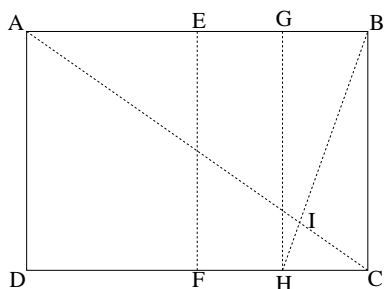
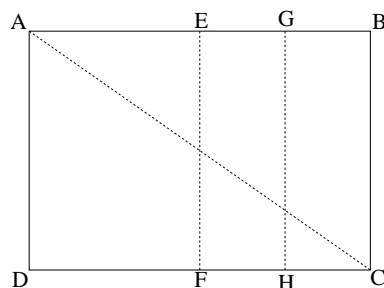
$$\overline{GB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$



A última afirmação segue do Teorema de Tales, já que IG e CB são paralelos.

O método anterior pode ser aplicado para se obter $\frac{1}{5}$ do segmento.

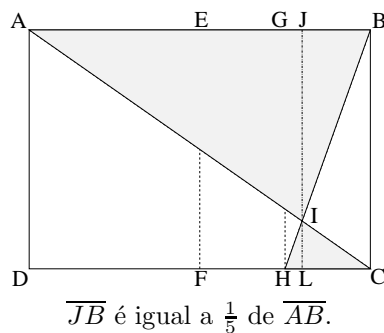
Pegue um papel retangular qualquer $ABCD$. Determine E e F , pontos médios de AB e DC . Determine também G e H , pontos médios de EB e FC .



Encontre BH , diagonal do retângulo $GBCH$. Chame de I a intersecção de AC e BH .

Dobre JL , perpendicular a AB , passando por I . Verifica-se que \overline{JB} é $\frac{1}{5}$ de \overline{AB} , pois

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{4}{1}$$



Com esse último método, podemos dividir qualquer segmento em n partes, com $n \in \mathbb{N}$, por indução: tendo o segmento JL da divisão em $n-1$ partes, dobrando a diagonal LB do retângulo $JBCL$, encontrando o novo ponto I na intersecção das diagonais, e dobrando um novo segmento $J'L'$ perpendicular a AB passando por I . Então $\overline{J'B} = \frac{1}{n}\overline{AB}$.

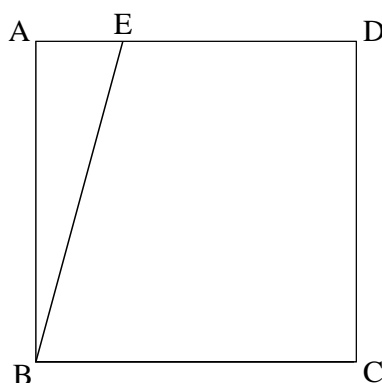
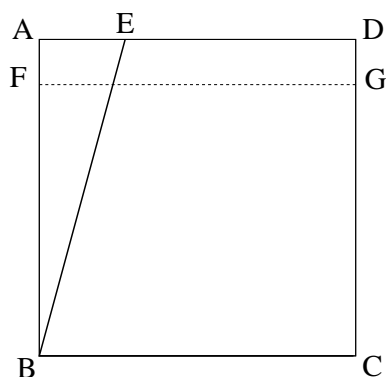
3

Trissecção do ângulo

Um dos famosos problemas da antiga Grécia era a trissecção de um ângulo qualquer com régua e compasso. Esse problema é impossível com régua e compasso, mas é solúvel com *Origami*. A construção dada a seguir é creditado a Hisashi Abe, conforme publicado em 1980 no Japão.

Seja um ângulo $\angle EBC$ menor que 90° conforme figura.

Para casos de ângulos obtusos, basta aplicar apenas no ângulo excedente a 90° e somá-lo à trissecção do restante.



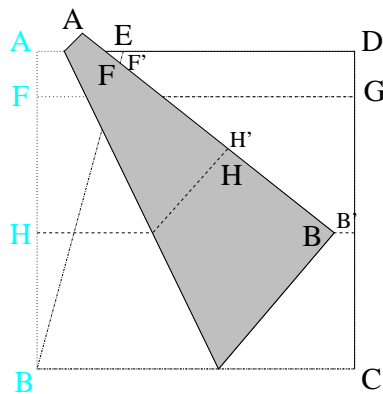
Determine uma paralela FG a AD .

Se a construção seguinte não couber no papel, escolha outra paralela mais convenientemente posicionada, ou use papel maior (ainda com vértice B na quina do papel).

Determine uma paralela HI , onde H e I são os respectivos pontos médios de FB e GC .

Dobre de modo a levar o ponto F ao segmento EB e o ponto B ao segmento HI .

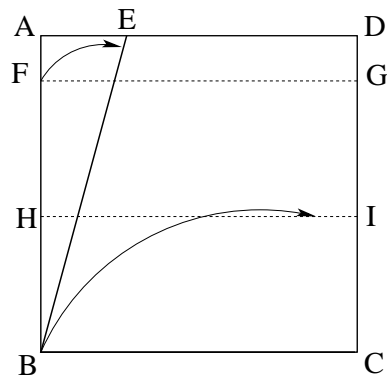
Esta última dobra é dada pelo Axioma 6 de Huzita.



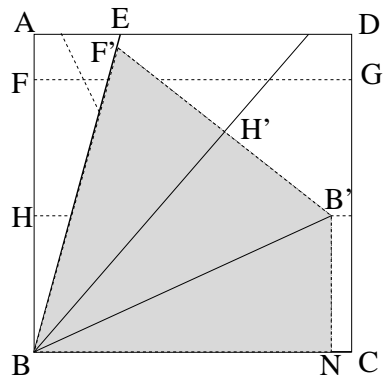
Abra novamente e trace os segmentos $B'B$ e $H'B$. Trace por B' uma paralela a HB , com extremidade N .

Temos que os triângulos $\triangle BB'N$, $\triangle BB'H'$ e $\triangle BF'H'$ são congruentes, com os ângulos em B congruentes.

De fato:



Para uma melhor visualização, marque os pontos H' , F' e B' (onde foram H , F e B), sobre o papel, e trace o segmento $F'B'$.



4

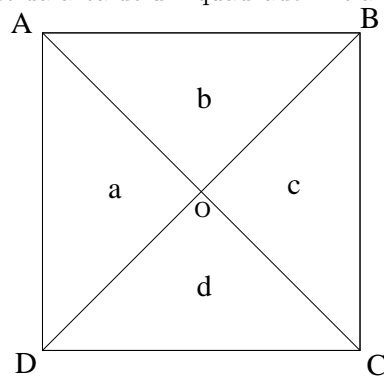
Quadrados e Áreas

4.1 Proporção $\frac{1}{2}$ da área

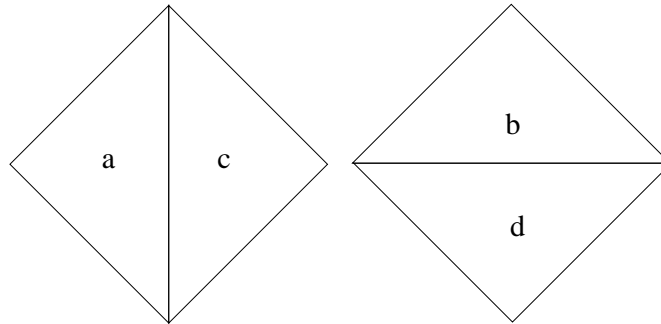
Um problema que simplesmente podemos obter com régua e compasso e de fácil aplicação em *Origami*, com ajuda de uma tesoura, é como obter um quadrado com a metade da área de um quadrado inicial.

Seja um quadrado ABCD. Junte os vértices A e C para obter o segmento BD. Analogamente, obtenha o segmento AC.

É fácil ver que os ângulos juntos ao centro são retos.

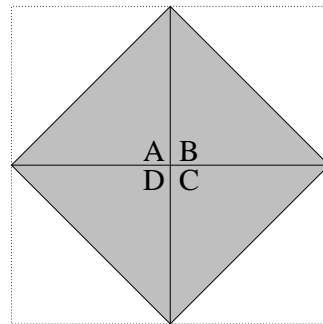
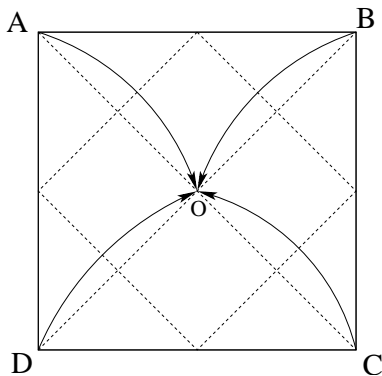
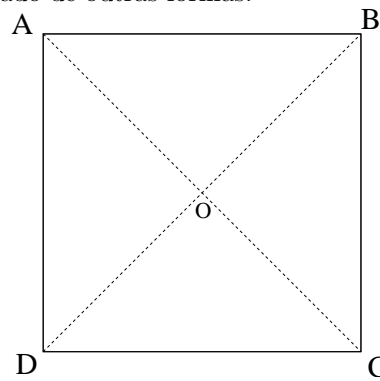


Recortando os triângulos obtidos e juntando-os dois a dois como na figura abaixo, teremos dois quadrados, cada um com a metade da área do quadrado ABCD inicial.



É possível obter esse mesmo resultado de outras formas.

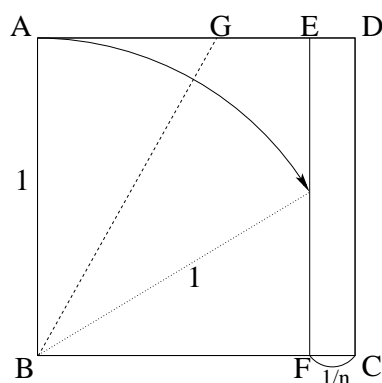
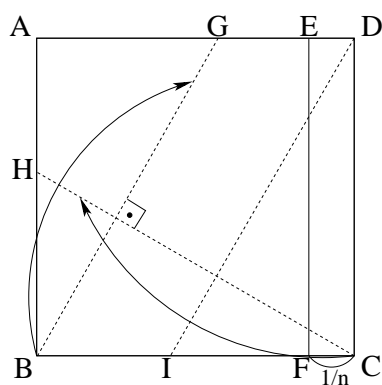
*Seja dado um quadrado $ABCD$.
Leve todos os vértices ao centro do quadrado, ou seja, no encontro das duas diagonais.
O quadrado resultante tem a metade da área do quadrado original.*



4.2 Proporção $\frac{1}{n}$ da área

Vimos no capítulo anterior uma forma de se dividir um segmento em n lados, obtendo assim, a proporção de $\frac{1}{n}$. Na primeira parte deste capítulo, vimos como obter um quadrado com a metade da área de um quadrado dado. Veremos agora como obter um quadrado de área $\frac{1}{n}$ da área original.

Iniciando com um quadrado $ABCD$, dobre o lado na proporção $\frac{1}{n}$ que desejar. Marque os pontos E e F , conforme figura. Fixando B , leve o vértice A ao segmento EF , rotacionando por um eixo BG .

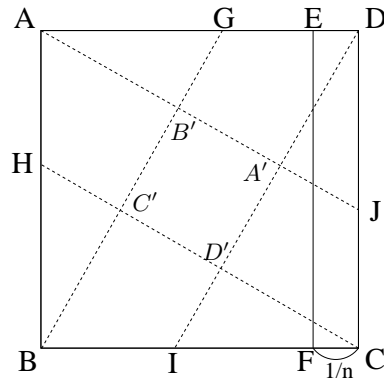


Fixe C e leve B sobre BG , obtendo o eixo HC ($HC \perp BG$).

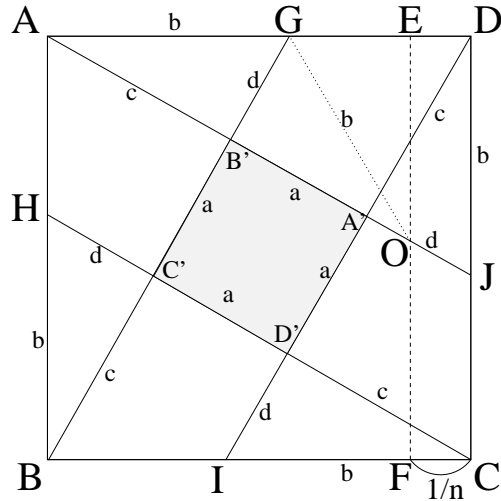
Repita o procedimento nos outros vértices.

Note que os eixos de rotação são ortogonais, pois o vértice é levado ao eixo que o contém.

Os eixos formarão um quadrado. Esse quadrado $A'B'C'D'$ está para $ABCD$, assim como $\frac{1}{n}$ está para 1. Em outras palavras, a área de $ABCD$ dividido por n é igual a área de $A'B'C'D'$.

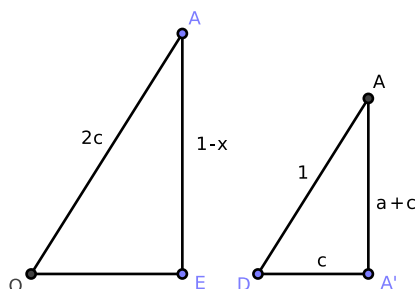


Para demonstrar a proporção entre as áreas de $A'B'C'D'$ e $ABCD$, vamos analisar as relações entre os segmentos construídos, nomeando os elementos conforme a figura:



Supondo que $ABCD$ tem lado 1 e que $x = \frac{1}{n}$, basta mostrar que $a^2 = x$, onde a é o lado do quadrado $A'B'C'D'$.

Temos que $\overline{AB'} = \overline{B'O} = c$ por construção e que os triângulos $\triangle AA'D$ e $\triangle AEO$ são semelhantes, por serem retângulos e possuírem o mesmo ângulo em A .



Da semelhança,

$$\frac{1-x}{2c} = \frac{a+c}{1},$$

donde $a+c = \frac{1-x}{2c}$.
Além disso, no $\triangle AA'D$,
temos que $(a+c)^2 + c^2 = 1$.

$$\text{Mas } (a+c)^2 + c^2 = a^2 + 2ac + 2c^2 = a^2 + 2c(a+c) = a^2 + 2c \frac{1-x}{2c} = a^2 + 1 - x.$$

$$\text{Logo } a^2 + 1 - x = 1, \text{ donde } a^2 = x = \frac{1}{n}.$$

Conclui-se então que a área do quadrado $A'B'C'D'$ é $\frac{1}{n}$ da área do quadrado $ABCD$.

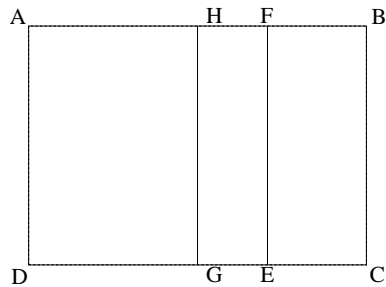
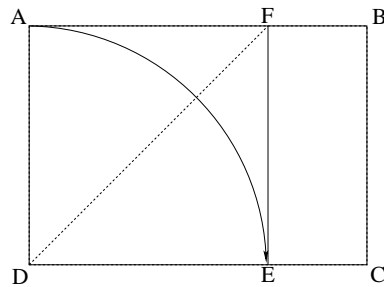
Obs: n não precisa ser número inteiro.

5

Quadratura do Retângulo

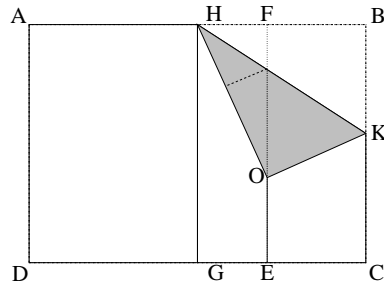
Dado um retângulo $ABCD$, o problema consiste em transformá-lo num quadrado de mesma área.

Construa o quadrado $AFED$ como na figura.



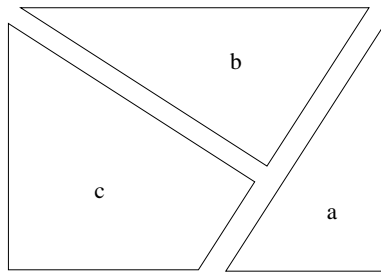
Dobre o segmento HG , onde H e G são os pontos médios de AB e DC .

Com o ponto H fixo, leve o vértice B ao segmento EF , encontrando o ponto O no segmento EF , e K no segmento BC .

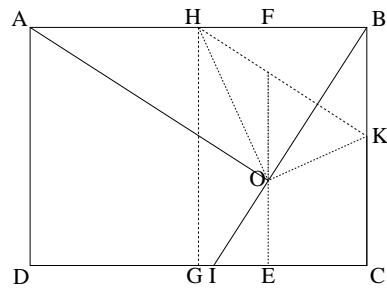


Os triângulos $\triangle HKB$ e $\triangle HKO$ são congruentes.

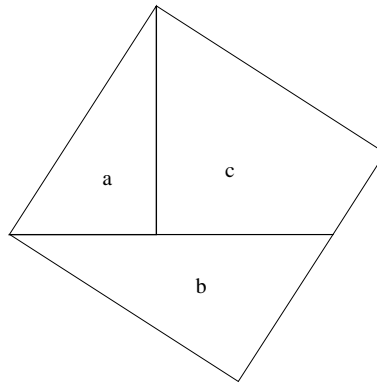
*Prolongue BO até encontrar DC no ponto I .
Recorte pelos segmentos OA e BI .*



Reorganize as peças de modo a obter um quadrado de mesma área do retângulo $ABCD$.



Nomeie as peças como a , b e c , conforme a figura.



Mas será que realmente obteremos um quadrado perfeito?

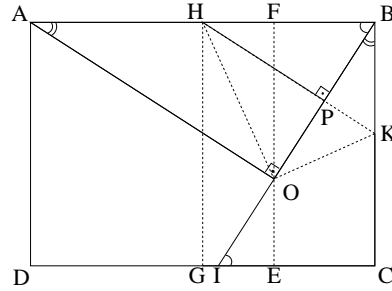
Provavelmente, devido algumas imprecisões nas dobras o resultado pode ser duvidoso. Verificaremos então, os segmentos e ângulos obtidos:

Vimos que $\triangle HOK \cong \triangle HBK$, já que são refletidos em relação a HK .

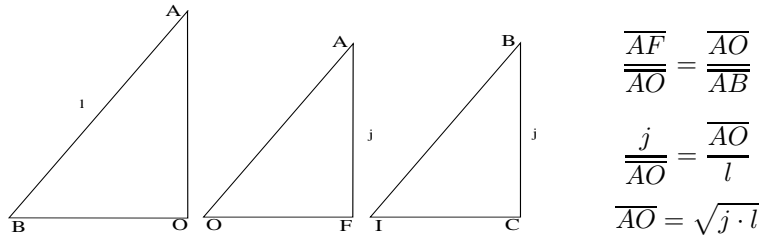
Temos que BO é perpendicular a HK pela construção. Se $P = BO \cap HK$, o ângulo $\angle HBP$ é congruente ao ângulo $\angle ABO$.

Como H é ponto médio de AB e P é ponto médio de OB , temos então que o triângulo $\triangle ABO$ é semelhante ao triângulo $\triangle HBP$, na razão de $\frac{2}{1}$.

Logo, podemos concluir que AO é perpendicular a OB . Provado isto, podemos concluir que os outros ângulos que formarão os vértices do quadrado serão complementares, assim, concluímos que os ângulos satisfazem os ângulos de um quadrado (ou de um retângulo).



Resta provar se $\overline{BI} = \overline{AO} =$ lado do quadrado. Vamos chamar de j o lado menor e l o lado maior do retângulo. Por serem retângulos e um ângulo em comum, os triângulos $\triangle AOB$, $\triangle ICB$ e $\triangle AFO$ são semelhantes.



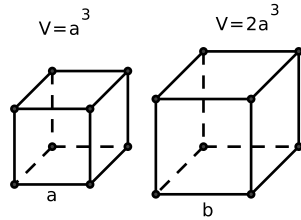
Precisamos averiguar o valor de \overline{BI} , outro lado do quadrado:

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AO}} \implies \frac{\overline{BI}}{l} = \frac{j}{\sqrt{j \cdot l}} \implies \overline{BI} = \frac{j \cdot l}{\sqrt{j \cdot l}} \implies \overline{BI} = \sqrt{j \cdot l}$$

A área do retângulo de lados j e l é dado por $j \cdot l$; a área do quadrado, de lado $\sqrt{j \cdot l}$, também é $j \cdot l$. Portanto, está satisfeita a quadratura do retângulo.

6

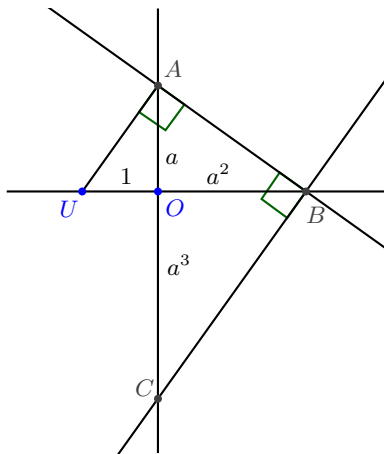
Duplicação do cubo



Problema: “Dado um cubo de aresta a , obter a aresta b de um cubo com o dobro do volume.”

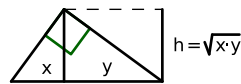
Este é mais um dos três problemas clássicos de Euclides. Mais uma vez, possível com *Origami* e impossível com régua e compasso.

Primeiro, podemos obter o volume a^3 do cubo de aresta a na seguinte construção:



Considere $\overline{OU} = 1$ e $\overline{OA} = a$.

Usando a propriedade



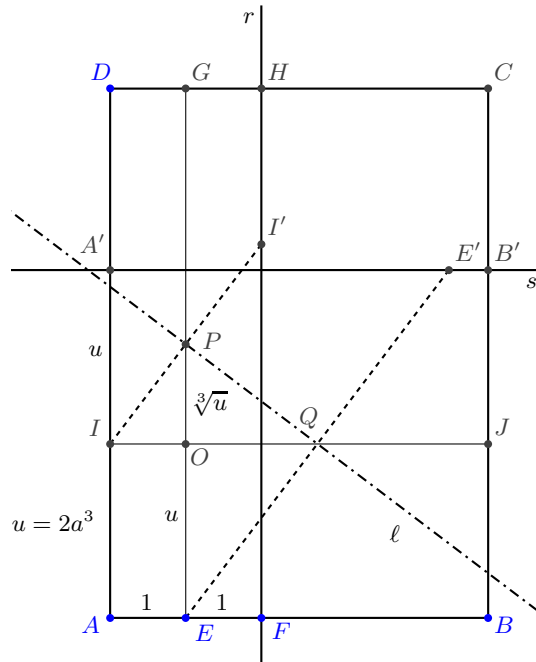
temos que

$$\overline{OB} = a^2 \text{ e } \overline{OC} = a^3.$$

Exercício: construa a^4 .

Tendo a^3 , vamos construir $b = \sqrt[3]{2a^3}$.

Para isso, tendo obtido $u = 2a^3$ e considere um retângulo $ABCD$ suficientemente grande para a construção seguinte:



Em AB marque E e F com $\overline{AE} = 1$ e $\overline{AF} = 2$.

Marque EG e FH .

Em AD obtenha I e A' com $\overline{AI} = u = \overline{IA'}$.

Marque IJ e $A'B'$.

Seja $O = IJ \cap EG$.

(*) Dobre levando I sobre $r = FH$ e E sobre $s = A'B'$, obtendo ℓ .

(**) ℓ determina em EG o ponto P e

$$\overline{OP} = \sqrt[3]{u}$$

(*) Esta dobra é do mesmo tipo utilizado na trissecção do ângulo, dado pelo Axioma 6 de Hizuta.

(**) Como ℓ é a mediatriz de II' e passa por P de EG , temos a mesma situação da figura anterior, onde os ângulos \widehat{IPQ} e \widehat{PQE} são retos e, portanto, $u = \overline{OE} = (\overline{OP})^3$, donde segue o resultado.

7

Pentágono e retângulo áureo

Neste capítulo será feito uma das construções de um pentágono regular. Existem outras formas de se obtê-lo, como veremos mais tarde. A propriedade explorada nesta construção é que o lado do pentágono é o segmento áureo da diagonal. Como subproduto, podemos construir o retângulo áureo.

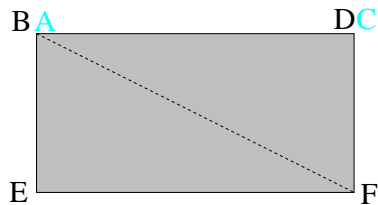
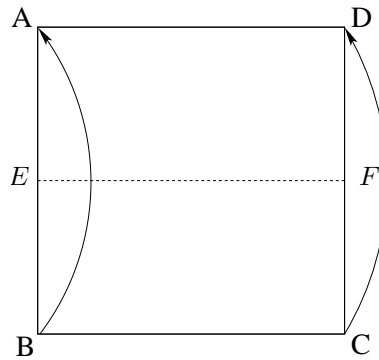
Lembramos que retângulo áureo de lados a e b segue a proporção $\frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$ ($a < b$), donde $a^2 = b^2 - ab$ e portanto, $a = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Para $b = 2$, $a = \sqrt{5} - 1$.

Considere um quadrado $ABCD$ de lado 2.

Obs: Esta medida é para simplificar a demonstração.

Junte os vértices A com B e D com C , obtendo assim um retângulo de 2×1 e o lado EF .

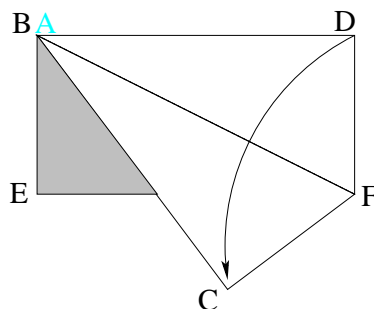
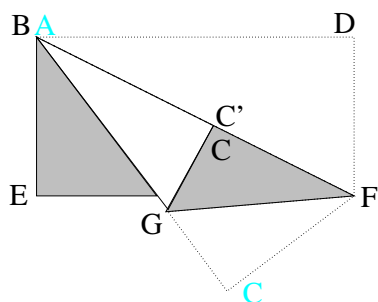


No retângulo $BEFD$ escolha uma diagonal, digamos, BF .

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{BF}^2 = 2^2 + 1^2 \implies \overline{BF} = \sqrt{5}$$

Usando a diagonal como eixo de rotação, dobre o vértice C para fora.

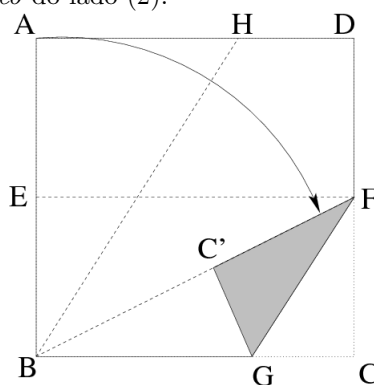


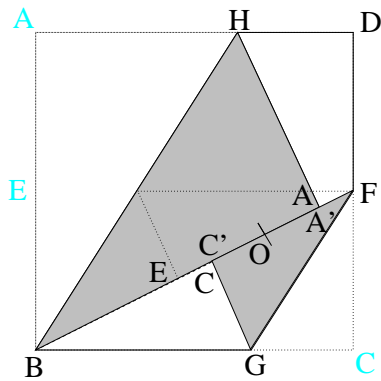
Fixando F , leve o ponto C ao segmento BF e marque o ponto C' .

Temos que \overline{CF} é igual a 1, pois assumimos que o lado do quadrado é 2. Assim, $\overline{BF} - \overline{CF}$ é igual a $\sqrt{5} - 1$, ou seja, $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$.

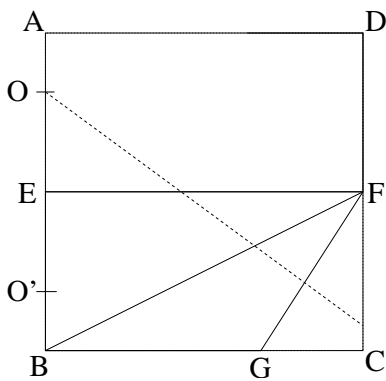
Observe que $\overline{BC'}$ é o segmento áureo do lado (2).

Voltando para o quadrado inicial, fixe B e leve o vértice A até BF .

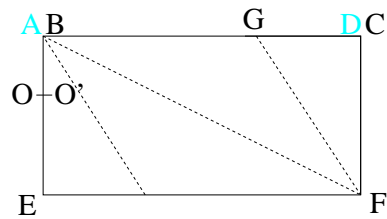




Com a mesma distância de AO , a partir de B , marque O' .

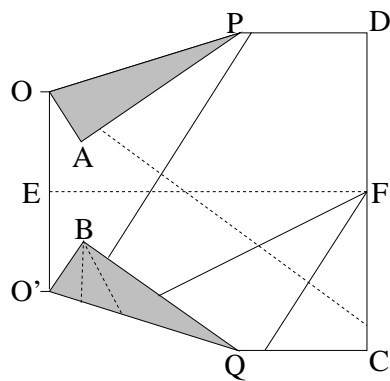
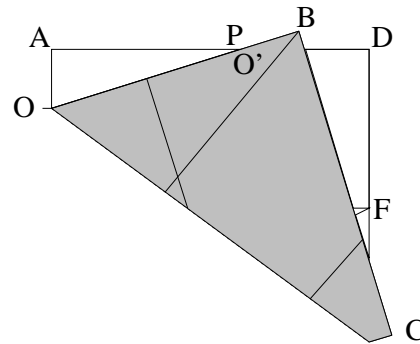


Subtraia $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$ do lado $\overline{AB} = 2$; o resto, ou seja, CA' , divida ao meio no ponto O .



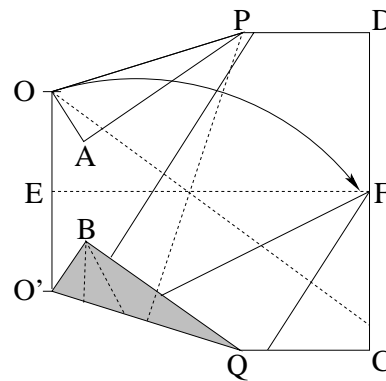
Temos então que o segmento OO' tem comprimento igual a $\overline{BC'} = \sqrt{5} - 1$, podendo ser um dos lados do pentágono.

Fixando O , leve o ponto O' até AD .
 Marque como P o ponto onde O' toca AD .



Fixando P , leve O ao segmento EF .
 Note que a dobra faz-se em torno do eixo dos pontos P e o ponto médio de $O'Q$.

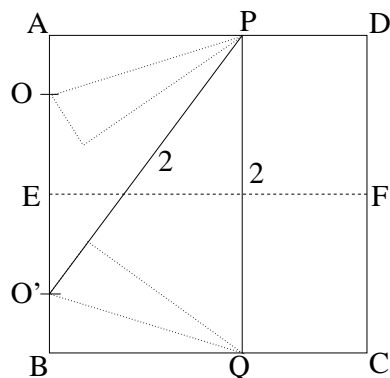
Analogamente, marque como Q o ponto onde O encontra BC .
 Dobre por OP e $O'Q$.



Neste momento, vamos analisar alguns resultados.

Temos que os pontos O' e Q são simétricos a O e P em relação a

EF , por construção. Além disso, $\overline{OO'} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{AO} = \overline{BO'} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$



Por Pitágoras,

$$\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{OP}^2,$$

donde

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \overline{AP}^2 = (\sqrt{5}-1)^2$$

$$\text{e portanto, } \overline{AP}^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Temos ainda que $\overline{AP}^2 + \overline{AO'}^2 = \overline{O'P}^2$, lembrando que $\overline{AO} = \overline{AO'} + \overline{OO'}$.

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \overline{O'P}^2$$

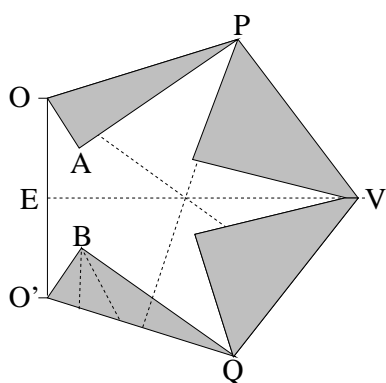
$$\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} = \overline{O'P}^2$$

$$\overline{O'P}^2 = 4 \Rightarrow \overline{O'P} = 2$$

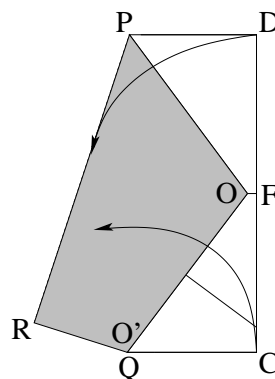
$$\overline{O'P} = \overline{PQ} = 2 \text{ (lado do quadrado)}$$

Com isso, temos que $\triangle O'PQ$ é um triângulo isósceles e por isso, se R é o ponto médio de $O'Q$, então $PR \perp O'Q$. A reflexão do quadrilátero $OPRO'$ em torno do eixo PR , determina V , exatamente sobre EF .

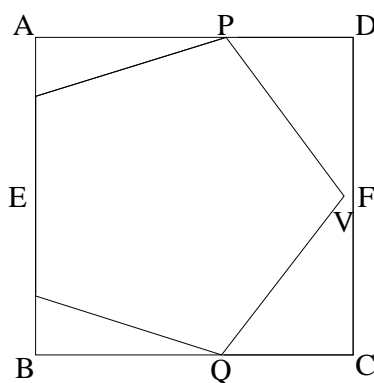
Continuando, leve os vértices D e C sobre o quadrilátero $OPRO'$.

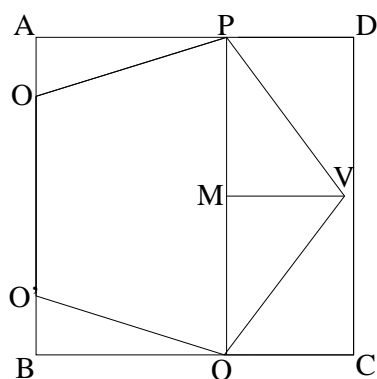


O pentágono é mesmo regular?
Inicialmente supomos o lado do quadrado igual a 2. Encontramos o segmento $\sqrt{5}-1$ e o utilizamos como lado do pentágono. Vimos que o vértice V foi obtido através da reflexão do quadrilátero $OPRO'$.



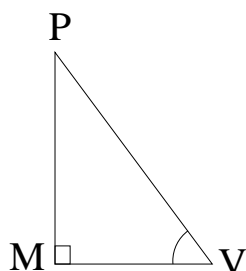
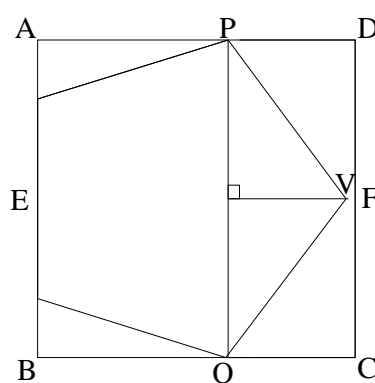
Volte apenas a dobra efetuada sobre o eixo PR , obtendo assim um pentágono regular.





O triângulo $\triangle PVQ$ é isósceles e congruente ao POO' , assim, traçando uma perpendicular a PQ e passando por F , temos que MF , conforme figura, é bissetriz do $\angle PVQ = 2\alpha$ e divide PQ ao meio. Observação: $V \neq F$.

Vimos também, em passos da construção do pentágono, que os pontos P e Q são os vértices do pentágono, e, pela construção, $\overline{OP} = \overline{O'P} = \overline{OO'} = \sqrt{5} - 1$ e $\overline{PQ} = \overline{O'P} = 2$.



Temos que $\overline{PM} = 1$, $\overline{PV} = \sqrt{5} - 1$. Então

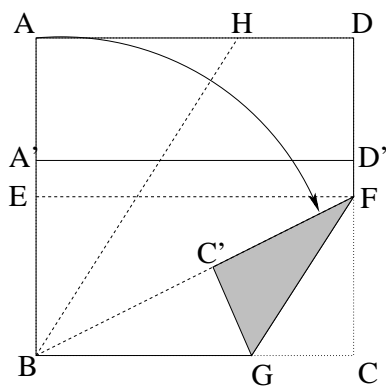
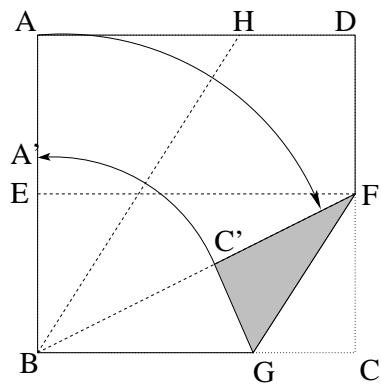
$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5} - 1} \Rightarrow \alpha = 54^\circ$$

Logo, $\angle PFQ = 108^\circ$, que corresponde ao ângulo interno de um pentágono.

A demonstração dos outros ângulos fica por conta do leitor.

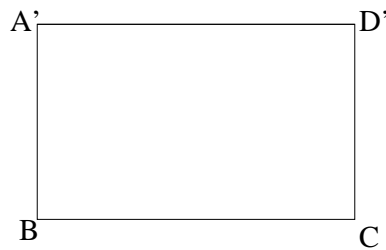
Se quando obtivemos o segmento áureo BC' do lado (2), transferíssemos a medida a um dos lados do quadrado a partir de um dos vértices, teríamos então o retângulo áureo. Voltemos então à construção:

Fixe B e leve o vértice A até BF .
 O ponto (chamemos de A') do
 lado BA que é levado em C' é
 tal que BA' é o segmento áureo
 do lado.



Por A' trace uma perpendicular
 ao lado AB .

Está pronto o retângulo áureo $A'BCD'$.



8

Poliedros de Platão de faces triangulares

Entre os cinco poliedros convexos regulares, conhecidos como Poliedros de Platão, três deles são constituídos de faces triangulares: tetraedro, octaedro e icosaedro.

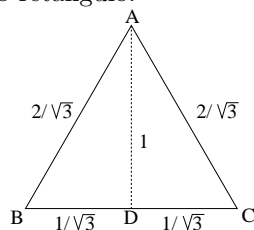
Neste capítulo construímos as unidades básicas (ou módulos) que se encaixam de formas distintas, formando os poliedros de faces triangulares acima..

Para isso, vamos abordar algumas construções preliminares.

8.1 Retângulos $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$

A construção das unidades básicas passa por preparação de retângulos de proporções especiais.

Vamos trabalhar inicialmente com a relação $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$ sobre os lados do retângulo.

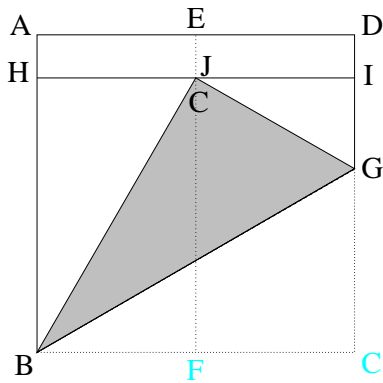


Essas medidas aparecem naturalmente no triângulo equilátero.

Seja um papel quadrado $ABCD$ de lado 1.

Encontre EF , onde E e F são pontos médios de AD e BC , respectivamente.

Fixando B , leve C a EF .

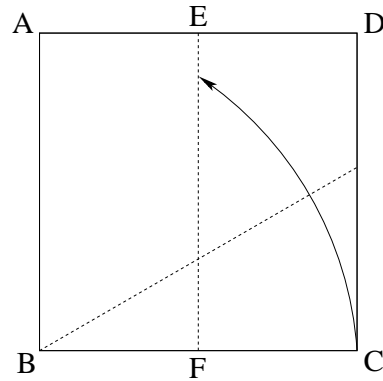


Teremos agora, dois casos.

O primeiro caso, a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$:
Corte por HI e EF .

Obteremos duas peças, cujas proporções dos lados são de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ em cada peça.

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

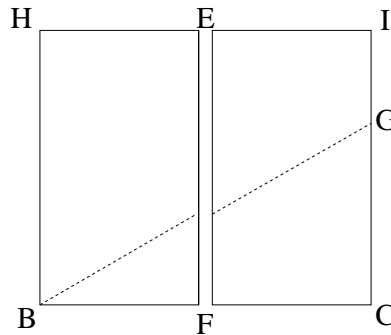


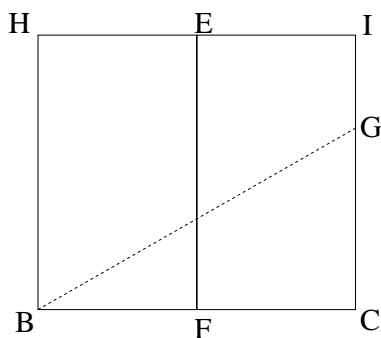
Pelo ponto J obtido em EF , dobre a perpendicular HI a EF .

Teremos, para o segmento HB que:

$$\overline{HB}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\overline{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





No segundo caso a razão $\frac{2}{\sqrt{3}}$:

Corte somente por HI.

Sem cortar por EF , teremos um retângulo com a seguinte proporção:

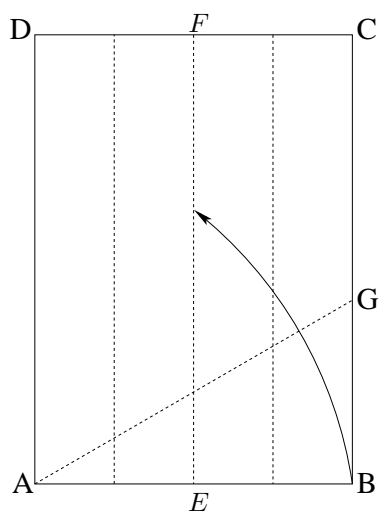
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{HB}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Lembramos que o papel A4 de lados a e b ($a > b$) é tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2}$, ou seja, dobrando pelo lado maior, temos dois retângulos com a mesma proporção do original. Logo $\frac{a^2}{2} = b^2$, donde $a = b\sqrt{2}$, isto é, o lado maior é a diagonal do quadrado de aresta igual ao lado menor. É interessante, mas não é a proporção que queremos para os nossos módulos.

Mas podemos obter do papel A4 doze unidades com a proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, com uma perda muito pequena. Isto facilitará na construção dos poliedros.

Seja um papel A4 com os vértices ABCD. Dobre pelo lado maior ao meio e depois ao meio novamente, obtendo assim, três vincos, dividindo o papel em 4 partes iguais.





Fixando A , leve o vértice B até o segmento EF feito pelo vinco central, rotacionando em torno do eixo AG .

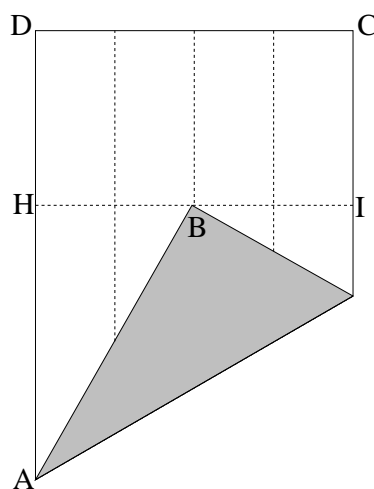
Pelo ponto obtido em EF marque o segmento HI perpendicular a AD .

Pelo que vimos anteriormente, a altura \overline{AH} equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se considerarmos $\overline{AB} = 1$, isto é,

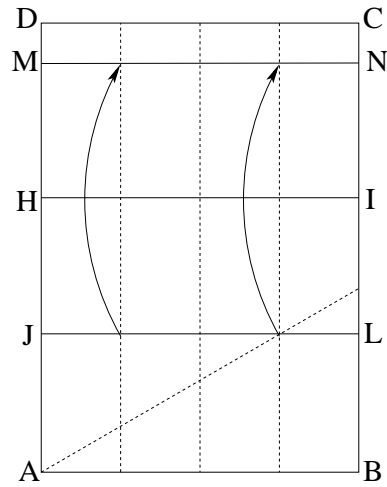
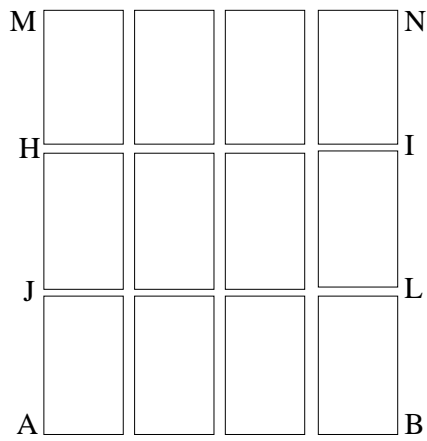
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dividindo \overline{AH} por 2 e \overline{AB} por 4, temos

$$\frac{\frac{\overline{HA}}{2}}{\frac{\overline{AB}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$



Para aproveitar o papel, dobre a proporção obtida usando como eixo HI , conseguindo mais quatro peças com razão $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



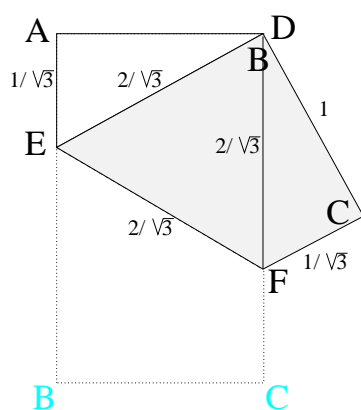
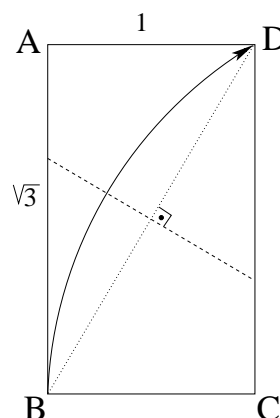
O resultado é a obtenção de doze peças com a razão de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

8.2 Construção das unidades

Construiremos agora os módulos, que chamaremos de “unidades” A e B dos poliedros de faces triangulares. Para isto, será necessário a utilização de retângulos de proporção $\frac{1}{\sqrt{3}}$, como as 12 peças obtidas do papel A4, visto anteriormente. Estas unidades formam triângulos equiláteros, que ao se encaixarem, produzirão os poliedros.

8.2.1 Unidade A

Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, leve o vértice B ao D .

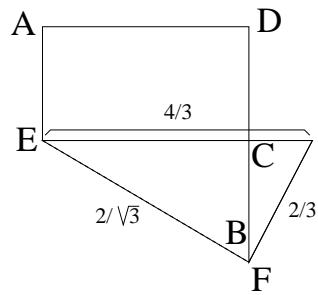


Ao levar B a D , surge um eixo de rotação EF .

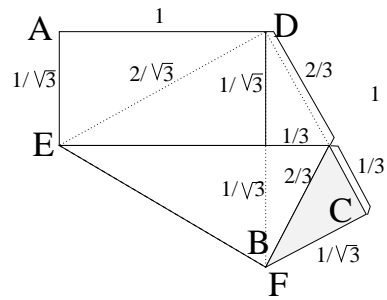
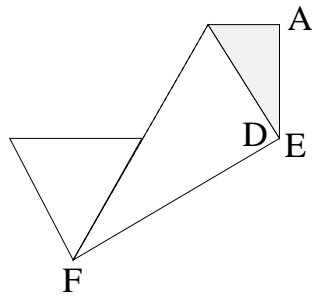
EF é a mediatriz de BD .

Os $\triangle EFD$ e $\triangle EFB$ são equiláteros de lado $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Leve o vértice B ao ponto F .
A nova dobra é paralela a AD .

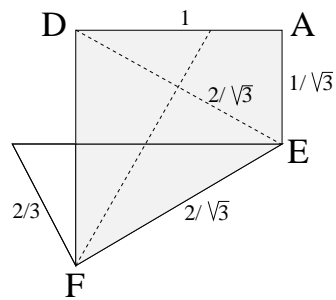


Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.



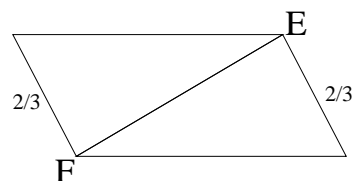
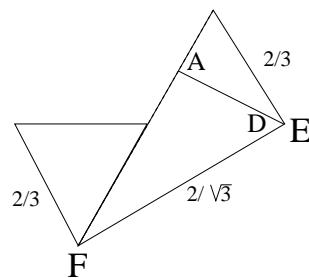
C

Leve o vértice C sobre DF .



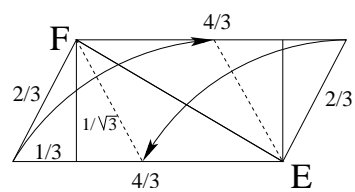
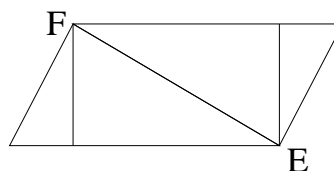
Leve o vértice D ao ponto E .

Mova o vértice A dobrando segundo o eixo do ponto E .

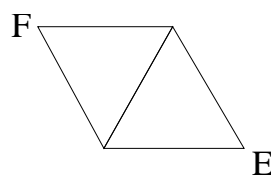


Desfaça a dobra pelo eixo EF , de modo que apareça um paralelogramo.

Vire a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.



Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.



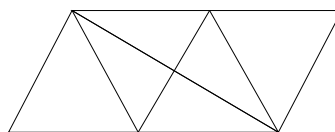
Obtém-se um losango cujos lados e a diagonal menor medem $\frac{2}{3}$.

Nas figuras acima, temos que a base do paralelogramo é $\frac{4}{3}$, ou seja, cabem duas vezes o lado $\frac{2}{3}$.

O segmento pertencente à base do paralelogramo e que forma um triângulo retângulo é $\frac{1}{3}$ e a altura é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esses valores satisfazem as medidas do triângulo equilátero citado no início deste capítulo.

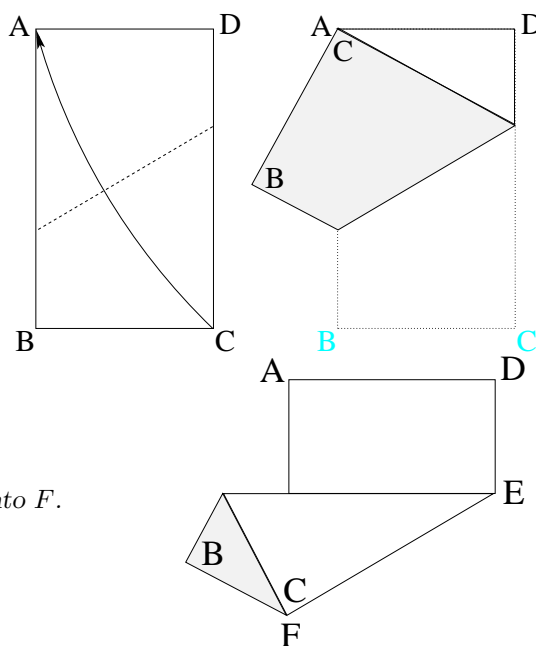
Abra o losango para obter a unidade A, que é composta por quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{2}{3}$.



8.2.2 Unidade B

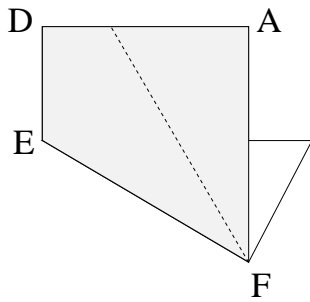
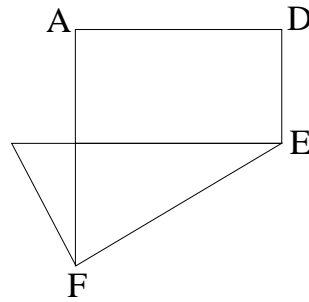
A construção segue os mesmos procedimentos da unidade A, com a diferença do lado pelo qual inicia-se a dobra.

Com uma peça retangular $ABCD$, respeitando as proporções, leve o vértice C ao A . O eixo de rotação será chamado de EF .

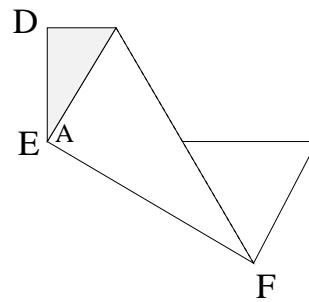


Leve o vértice C ao ponto F .

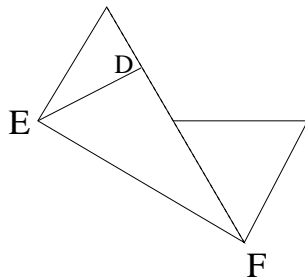
Leve o vértice B sobre AF .



Vire a peça, de modo que a parte de trás fique para frente.

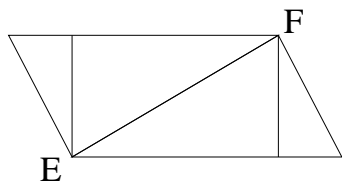
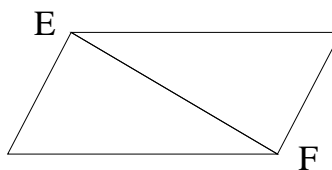


Leve o vértice A ao ponto E .



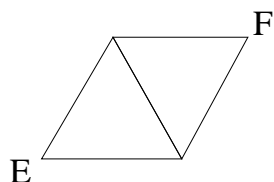
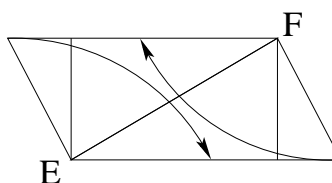
Pegue o vértice D e dobre pelo eixo do ponto E .

Desfaça a dobra pelo eixo EF , de modo que apareça um paralelogramo.



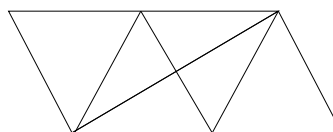
Vire a peça, de modo que a parte oculta volte-se para frente.

Leve as duas extremidades cujos ângulos são agudos sobre o lado oposto, fixando os vértices com ângulos obtusos.



Obtém-se um losango.

Abrindo, tem-se a unidade B.

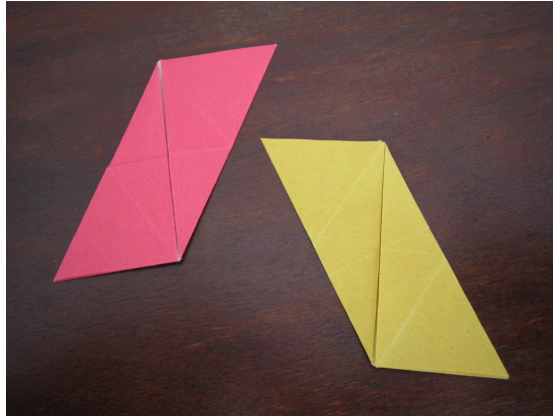


8.3 Montagem dos poliedros

Foram produzidas, nas unidades A e B, faces na forma de triângulos equiláteros. Com os triângulos equiláteros podemos construir apenas três poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, que são os Poliedros de Platão de faces triangulares.

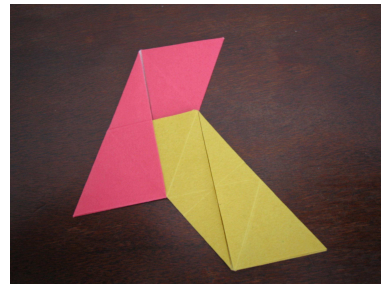
8.3.1 Tetraedro

Para a construção do tetraedro são necessários dois módulos, uma unidade A e uma unidade B.



Note que em cada unidade temos quatro triângulos equiláteros e os triângulos das pontas não possuem corte. Os cortes formam aberturas para encaixar os triângulos das pontas e ficarão no lado externo do poliedro.

Encaixe a unidade A em um dos cortes da unidade B (ou B em A).

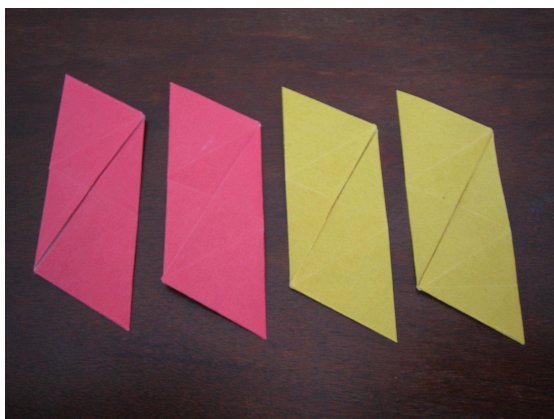




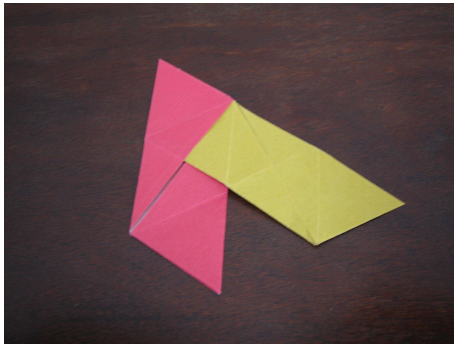
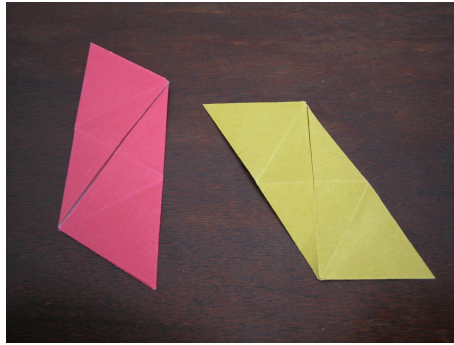
Dobre dando forma de um tetraedro e encaixando todas as pontas.
Concluimos o tetraedro.

8.3.2 Octaedro

Para a construção do octaedro serão necessários quatro módulos, AAAA ou BBBB ou AABB e, para que fique com faces bicolores, são necessárias duas peças de cada cor.



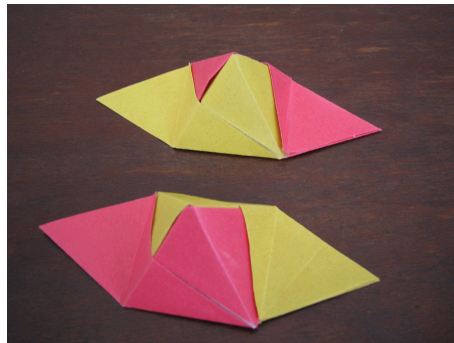
*Tome duas unidades A
(ou B), de cores distintas.*

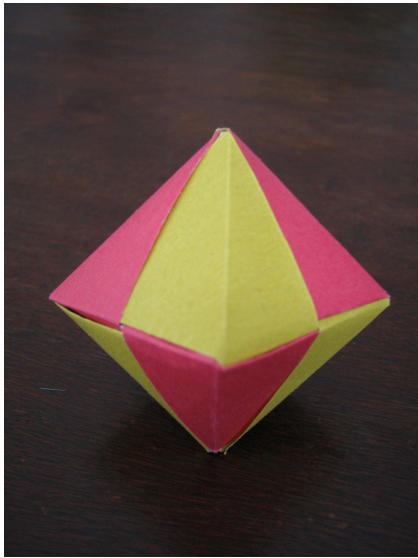


*Encaixe em uma peça A
na outra peça conforme a
foto.*

*Repita com outras duas
peças restantes.*

Forma-se então, duas
pirâmides de base
quadrada com abas
triangulares em lados
opostos da base.

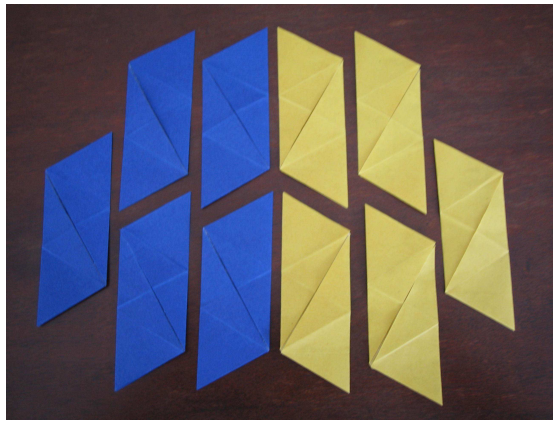




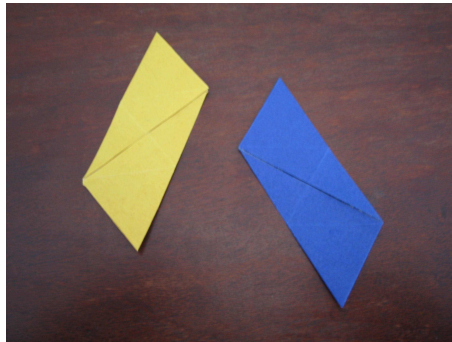
Encaixe as duas pirâmides para finalizar o octaedro.

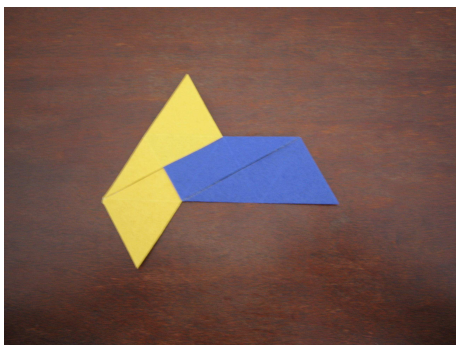
8.3.3 Icosaedro

Para a construção do nosso icosaedro bicolor são necessários cinco módulos de cada tipo e cor, ou seja, cinco unidades A com cor 1 e cinco unidades B com cor 2. Teremos uma faixa cilíndrica com dez faces bicolores e fechados com cinco faces de cor 1 de um lado e cinco faces de cor 2 do outro lado. Não é possível obter todas as faces bicolores.



Inicia-se com duas unidades distintas, A e B.

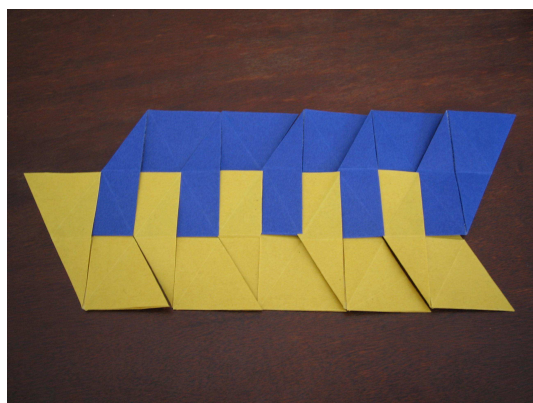
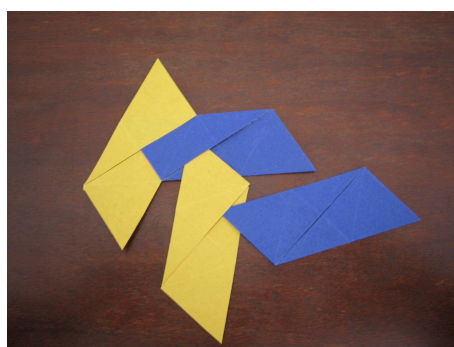




Encaixe a unidade B na unidade A.

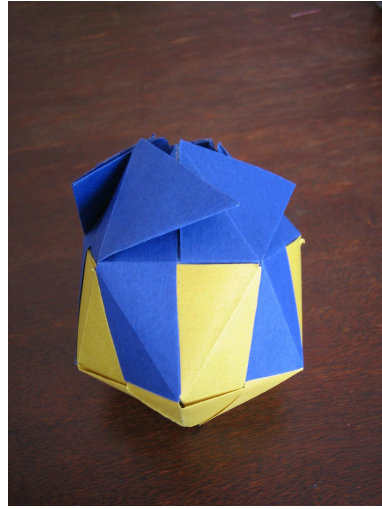
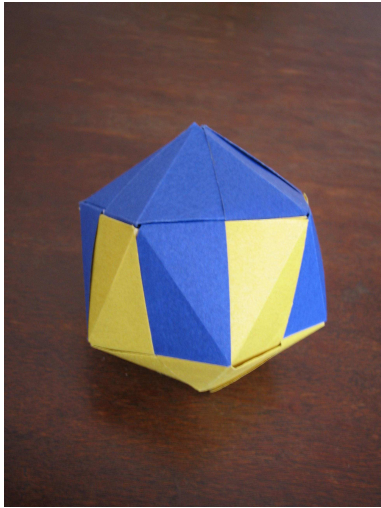
Repita o procedimento anterior, encaixando a peça A na B, depois a B na A, sucessivamente.

Para facilitar a montagem, recomenda-se que cole com alguma fita adesiva todos os encaixes na parte interna.



Encaixadas todas as peças, encaixe a última peça, no caso a peça B, na primeira peça A, dando um formato cilíndrico.

Com a faixa cilíndrica pronta, concentre-se nas pontas triangulares de um dos lados. Encaixe um triângulo em outro adjacente sucessivamente, até fechar o lado com as cinco faces.



Repita o passo anterior no outro lado do cilindro, finalizando o icosaedro.

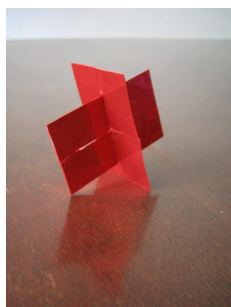
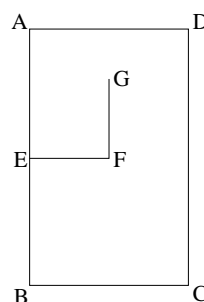
8.4 Esqueleto do Icosaedro

Não podemos deixar de apresentar o esqueleto do icosaedro, constituído de três retângulos áureos encaixantes. Isto porque no icosaedro, cada cinco faces triangulares com um vértice em comum determina um pentágono regular, cuja diagonal é o lado maior do retângulo áureo. O lado menor é uma aresta do icosaedro (do conjunto de cinco faces correspondente a outro vértice).

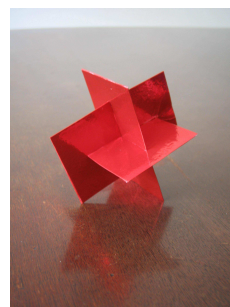
Já vimos, junto com a construção do primeiro pentágono, a construção do retângulo áureo de lado maior 2, que pode ser usada aqui.

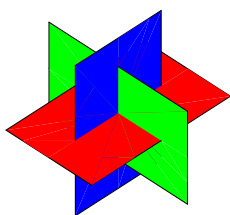
Recortados os retângulos com as devidas proporções, passamos para o seguinte:

Seja E = ponto médio de AB .
 Sejam EF e FG como na figura,
 com $\overline{EF} = \overline{FG} = \frac{\overline{AD}}{2}$
 Recorte por EF e FG .

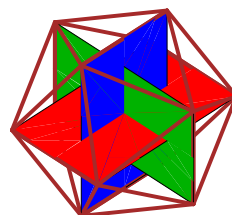


*Encaixe duas peças.
 Encaixe a terceira peça.
 Está pronto o esqueleto do icosaedro.*





Vemos que ligando os vértices da estrutura com segmentos obtemos um icosaedro.



Se estiver familiarizado com coordenadas cartesianas $\{O, x, y, z\}$ no espaço, encontre os vértices de um icosaedro com centro na origem do espaço, como exercício. Escolha a posição e o tamanho, de forma a facilitar as contas.

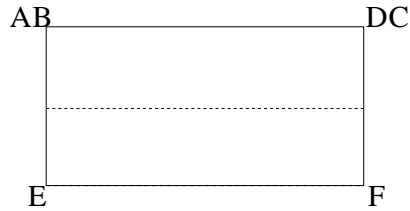
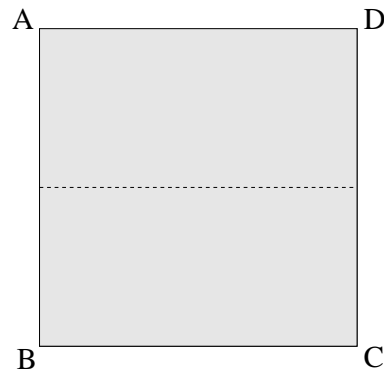
9

Poliedro de Platão de faces quadradas

Certamente o único poliedro de face quadrada é o cubo, ou hexaedro regular.

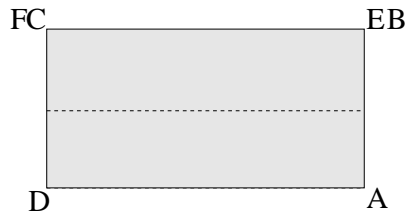
Existem diversas formas de se montar um cubo com *Origami*. Esta foi uma forma utilizada para visualizar bem o seu “esqueleto”, numa montagem de poliedros encaixantes.

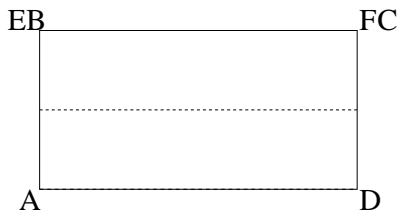
*Comece com um papel quadrado ABCD.
Leve B e C aos vértices A e D respectivamente.*



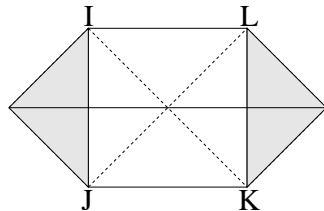
Obtém-se o segmento EF .

*Dobre de modo que leve B a E e C a F, mantendo A e D no lugar.
Gire 180°.*

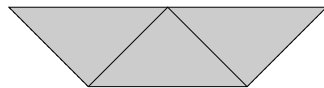




Leve todos os vértices sobre GH , mantendo G e H fixos, obtendo os segmentos IL em EF , $I'L'$ em BC e JK em AD . A peça resultante forma um feixe de 3 trapézios em GH .



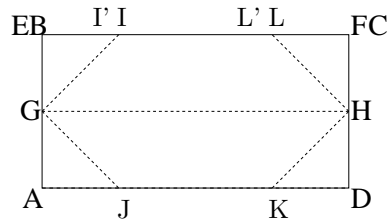
Leve JK sobre IL e ...



Abra pelo centro da base maior, como na dobradura de um barco.

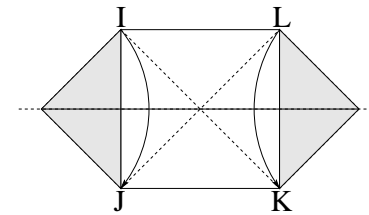
Vire o papel de modo que a parte opaca fique na frente.

Dobre AD sobre EF , obtendo o vinco GH e volte.

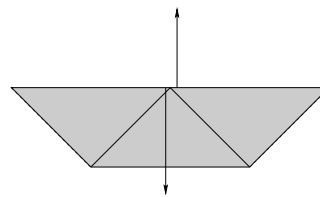


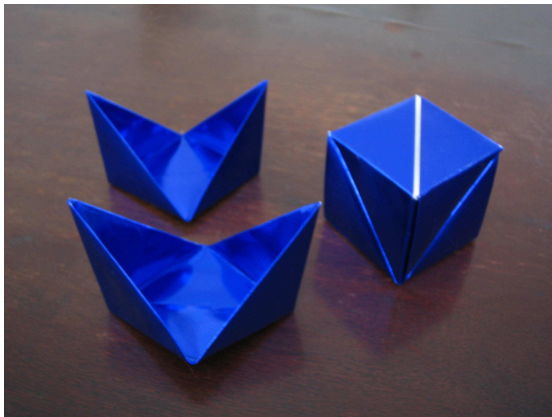
O trapézio $I'L'HG$ está atrás do trapézio $ILHG$ e o quadrilátero $IJKL$ é um quadrado.

Dobre as diagonais e os lados IJ e KL do quadrado $IJKL$.



... e obtenha o trapézio triplo.





*Abra ade-
quadamente,
e faça outra
peça igual.
Juntando,
forme o
cubo.*

Duas peças são suficientes se o cubo estiver com um “esqueleto”, que pode ser um octaedro estrelado. Neste caso, deve-se tomar o cuidado de verificar antes qual deve ser a medida da aresta do cubo para envolver o esqueleto. E observe que na construção acima, se u é a aresta do papel quadrado, o cubo tem aresta igual à diagonal do quadrado de aresta $\frac{u}{4}$.

10

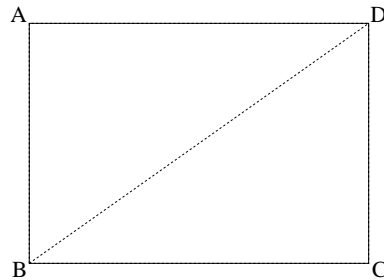
Poliedro de Platão de faces pentagonais

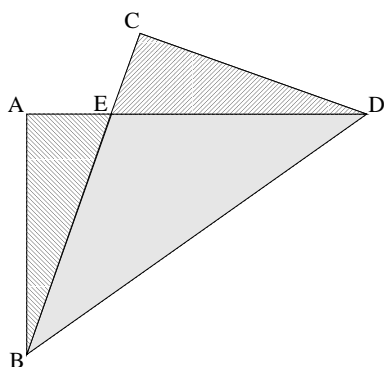
Veremos agora, a construção de um poliedro regular cujas faces são pentágonos. Como o ângulo interno do pentágono é de 108° em cada vértice, não existe a possibilidade de união de mais de três pentágonos, restando assim o dodecaedro como única solução.

10.1 Do copo ao pentágono regular

Para a construção do dodecaedro temos que começar com um papel de um tamanho especial, mas antes faremos uma análise em outra construção, a de um copo.

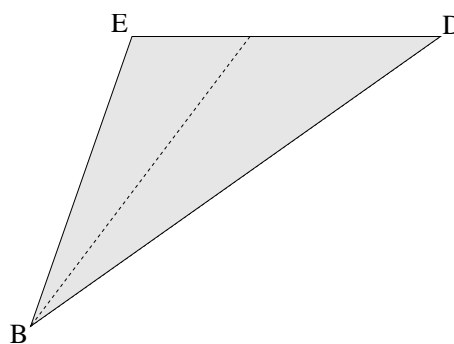
*Começando com um retângulo
 $ABCD$, dobre a diagonal BC .*



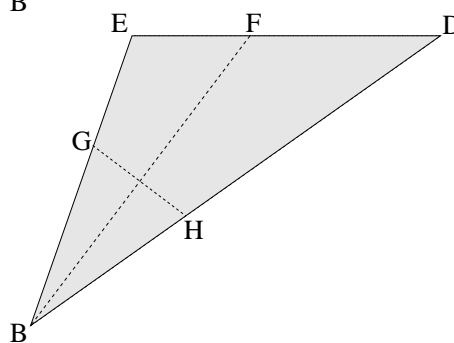


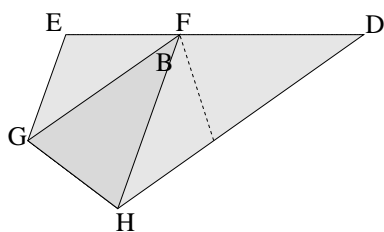
Encontrando o ponto E ,
intersecção de AD com BC ,
dobre por EB e ED , de modo
que não prenda a parte oposta.
Observe que o triângulo $\triangle BED$
é isósceles.

Dobre agora a bissetriz de
 \widehat{B} .



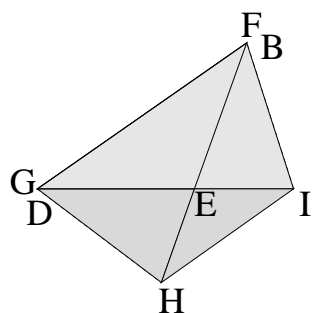
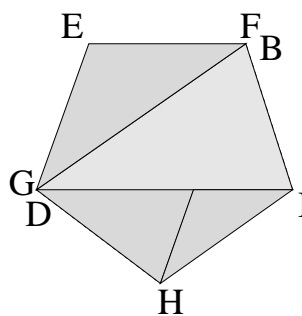
Encontrado ponto F ,
intersecção da bissetriz de
 \widehat{B} com ED , dobre a
mediatriz de BF , donde
surge o segmento GH ,
com $G \in EB$ e $H \in BD$.





Como GH é mediatriz de BF ,
dobre levando B a F .

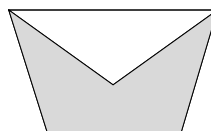
Seguindo os mesmos procedimentos do
vértice B , dobre D sobre G .
Um pentágono possivelmente irregular,
mas simétrico, está pronto.



Para terminar o copo, dobre o vértice
 E pelo eixo de rotação GF .

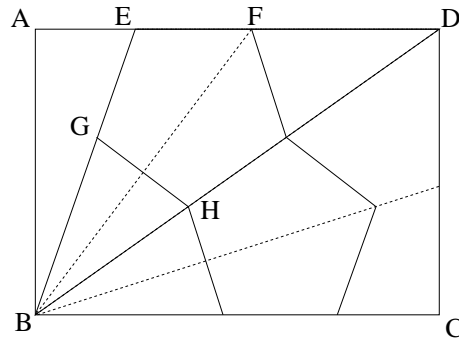
Note que existem duas folhas, sendo
uma dobrada para frente e outra para
trás.

E está pronto o copo



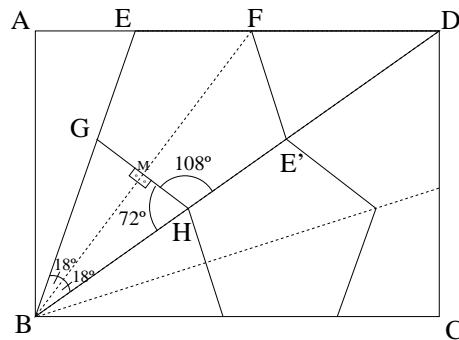
Faremos agora uma análise sobre a construção do copo, para deduzir-
mos o que é necessário para obtermos um pentágono regular.

Ao desdobrarmos a construção do copo teremos as linhas de dobras. Pela construção, sabemos que GH é mediatriz de BF e este por sua vez é bissetriz de \widehat{EBD} .

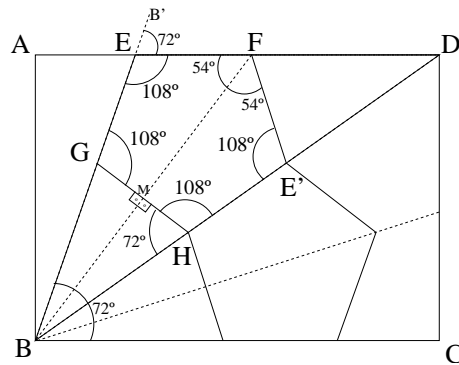


Sabemos que para que o pentágono seja regular, cada ângulo interno deve medir 108° . Como o triângulo $\triangle HBG$ é isósceles, temos que o \widehat{EGH} também mede 108° .

Seja $E' \in BD$ obtido onde E é levado na dobra por BF . Por construção temos que $\overline{EG} = \overline{HE'}$. Como BF é bissetriz de $\widehat{EBE'}$ e E e E' são equidistantes de B , tem-se que F é equidistante de E e E' .

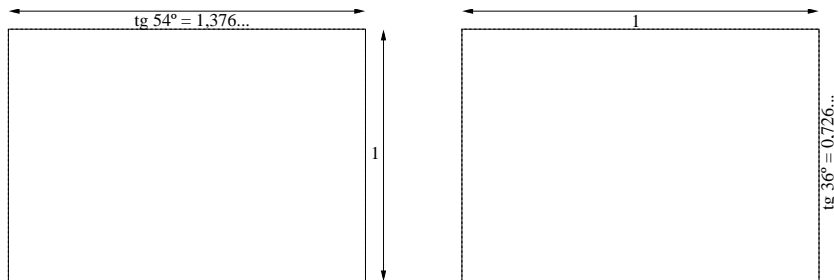


Por Tales, temos que prolongando BE , o $\widehat{B'ED}$ é correspondente ao \widehat{EBC} , medindo 72° . Pelo triângulo $\triangle EBF$, temos que $\angle EFB = 54^\circ$, assim como $\angle BFE'$. E finalmente o $\angle FE'B = 108^\circ$, por ser ângulo interno do pentágono.



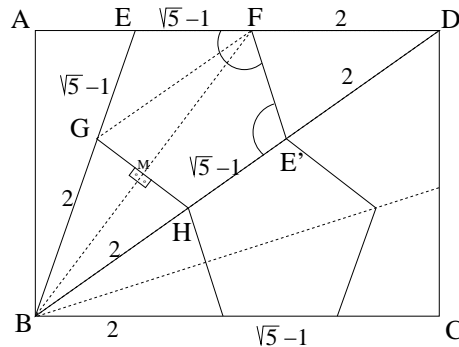
Temos então um pentágono com todos os ângulos de 108° . Resta provar que os lados são congruentes. Por construção, E' e H sendo os refletidos de E e G pela bissetriz BF de \widehat{EBD} , os segmentos GE e HE' são congruentes, assim como EF e FE' . Na construção, GD também é bissetriz de \widehat{ADB} e os segmentos EF e HE' , assim como EG e GH são congruentes.

Ou seja, para obtermos um pentágono regular devemos encontrar um ângulo exato. E esse ângulo exato deve ser o ângulo entre a base (o lado maior) e sua diagonal, devendo ter exatamente 36° , isto é, se o lado maior for equivalente a 1, o lado menor deverá ser igual a $\text{tg}36^\circ = 0,726\dots$. Ou então, se o lado menor for equivalente a 1, o lado maior deverá ser igual a $\text{tg}54^\circ = 1,376\dots$



Vimos, na primeira construção pentágono regular, que iniciamos com um quadrado de suposto lado 2. Verificamos também que a diagonal desse pentágono mantinha a mesma medida do lado do quadrado inicial e o lado do pentágono media $\sqrt{5}-1$. Observe que aplicando essas medidas na construção do copo, adotando já os devidos ângulos, temos:

GF tem, por construção, mesma medida de BG . Como BG é diagonal do pentágono, vamos supor que mede 2. Assim, o lado do pentágono mede $\sqrt{5}-1$ e também pela construção, $\overline{E'D} = 2 = \overline{FD}$.



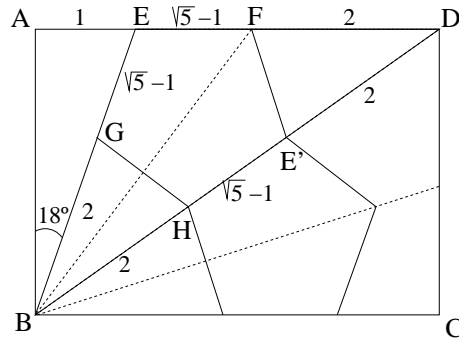
Sabemos portanto a medida do ângulo \widehat{CBD} , quanto deve medir a diagonal. Precisamos saber agora, quanto mede um dos lados do retângulo. Para isso, basta saber quanto mede AE .

Sabemos que $\angle ABE = 18^\circ$ e que $\overline{BG} = 2$ e $\overline{GE} = \sqrt{5}-1$. Então:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \text{sen}18^\circ$$

$$\frac{\overline{AE}}{\sqrt{5}+1} = 0,309\dots$$

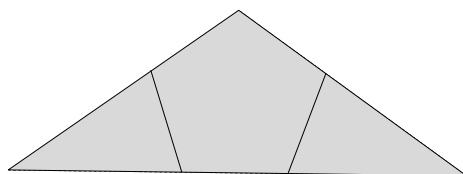
$$\overline{AE} = 1$$



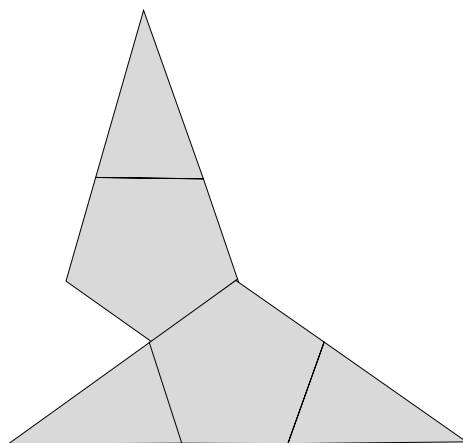
Como construir um retângulo com essas proporções, fixando o tamanho da diagonal 2 do pentágono? Este é um outro problema, que vamos apresentar depois da montagem do dodecaedro.

10.2 Dodecaedro

Podemos finalmente montar o dodecaedro. Através da dobradura do copo, iniciado com papel com as medidas especiais, na qual obtém-se os pentágonos regulares, tome a seguinte peça:

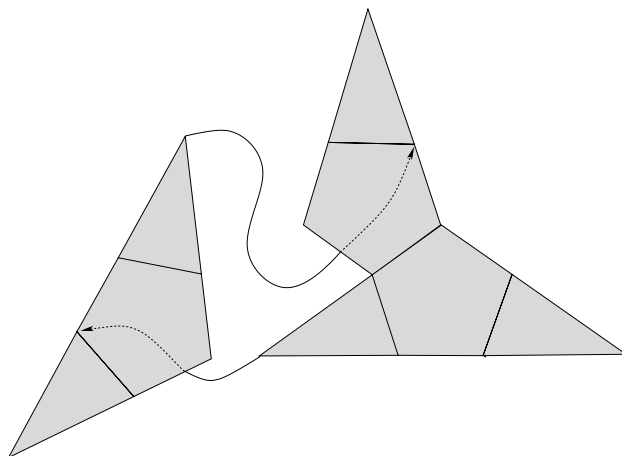


Como o dodecaedro é composto de 12 pentágonos, precisaremos de 12 peças para a construção.

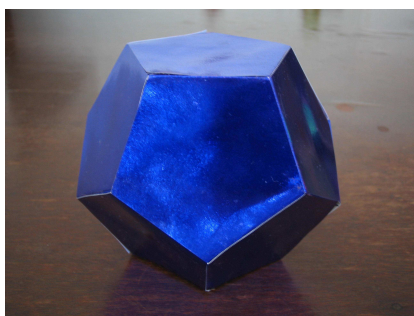


Os triângulos das peças se encaixam em um dos lados do pentágono central da outra peça. É preciso encaixar em uma certa sequência para

que fiquem firmes, sem necessidade de utilização de cola ou qualquer outro material adesivo. Na figura abaixo, a linha com a seta indica por onde a ponta da peça deve entrar e até onde ela deve chegar.



Notem que a ponta da peça, que é composta pelos lados congruentes de um triângulo isósceles fazem o papel de duas diagonais do pentágono. E finalmente...

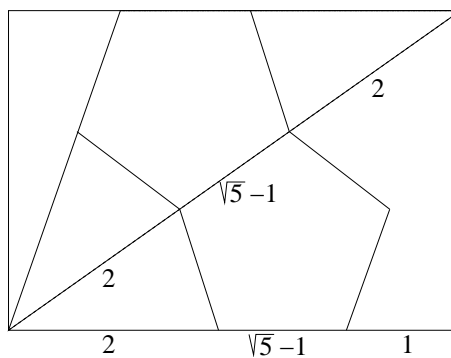


10.2.1 Construção do retângulo para o dodecaedro de aresta dada

Na construção de poliedros encaixantes aparece o problema de construir os poliedros com medidas pré-determinadas. O dodecaedro pode ser construído envolvendo um esqueleto do tipo icosaedro estrelado (icosaedro mais tetraedros em cada face) e isto determina as dimensões do dodecaedro.

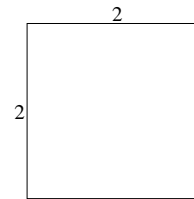
Vimos na construção do dodecaedro que são necessários retângulos especiais, cuja diagonal divide o ângulo reto em ângulos de 54° e 36° . Veremos que esses retângulos são construtíveis sem ajuda de um transferidor, e com a *medida desejada* na diagonal do pentágono, que continuará sendo chamada de 2.

Nosso objetivo será encontrar um retângulo com lado igual a $\sqrt{5} + 2$ e diagonal $\sqrt{5} + 3$.

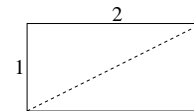


Comece com um retângulo com as medidas 6×4 .

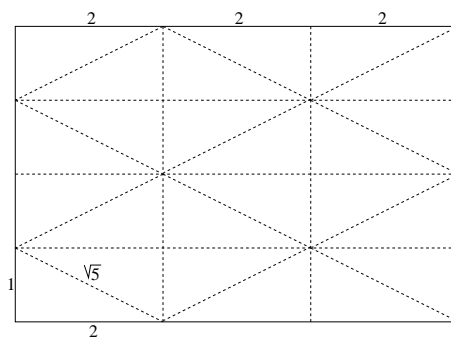
Dobre um quadrado de 2×2 .



Depois dobre um retângulo 2×1 e a sua diagonal.



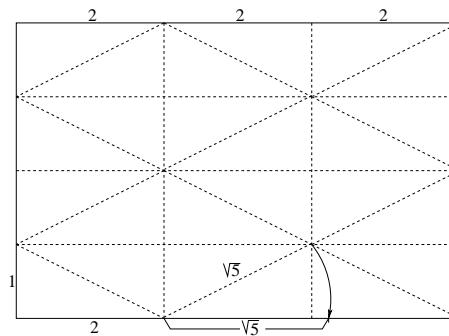
Essa diagonal corresponde a $\sqrt{5}$.

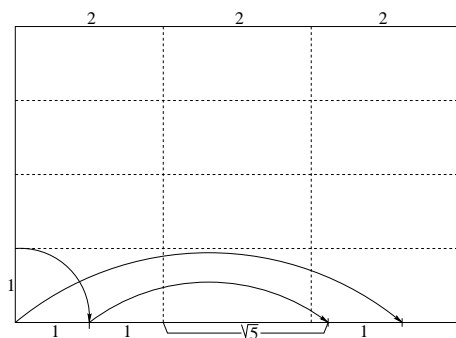


Abra o papel.

Podemos verificar que cada segmento na horizontal equivale a 2, na vertical 1 e na diagonal $\sqrt{5}$.

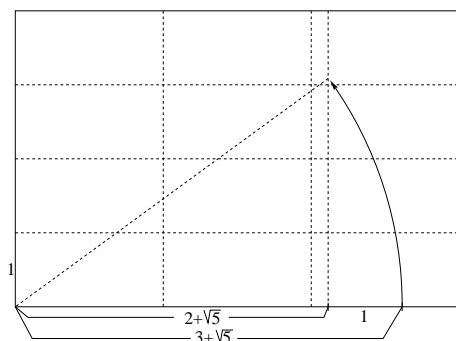
Dobre o segmento $\sqrt{5}$ sobre o lado e anote, conforme a figura.





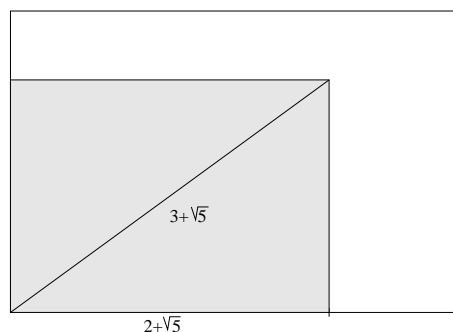
Dobre o segmento 1 sobre o lado que estamos construindo um dos lados do retângulo e transfira-o somando a $2 + \sqrt{5}$.

Encontramos os segmentos $2 + \sqrt{5}$ e $3 + \sqrt{5}$, ou seja, o lado e a diagonal do retângulo, dados suficientes para a construção o retângulo.



Dobre agora uma perpendicular ao lado $2 + \sqrt{5}$. Encontre o ponto que dista $3 + \sqrt{5}$ do vértice e pertence à perpendicular.

Temos assim um retângulo cujo lado mede $2 + \sqrt{5}$ e a diagonal $3 + \sqrt{5}$. Basta agora, seguirmos a construção do copo e obtermos as faces do dodecaedro.



11

Construções que se encaixam



Na foto ao lado são apresentadas, de baixo para cima:

- o esqueleto do icosaedro
- o icosaedro
- o icosaedro estrelado (icosaedro com uma pirâmide em cada face, que pode ser construída peças especiais de *Origami*, mas não o faremos aqui), que é o esqueleto do dodecaedro
- o dodecaedro

Estas peças se encaixam perfeitamente, na ordem acima.

Pode-se construir também com *Origami* outro conjunto de peças encaixantes: esqueleto do octaedro, octaedro, octaedro estrelado e envolvendo todos eles, o cubo.

Observe que esses encaixes são possíveis devido à dualidade entre dodecaedro e icosaedro, e entre cubo e octaedro. A cada face do dodecaedro corresponde um vértice do icosaedro e vice-versa. A cada face do cubo corresponde um vértice do octaedro e vice-versa.

Palavras finais

Este trabalho foi baseado num trabalho de conclusão de curso de Eduardo Cavacami no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de São Carlos e depois apresentado como Oficina na IV Bienal da SBM em 2008.

No decorrer do desenvolvimento do trabalho foi observado que muitas pessoas associam *Origami* com dobraduras de animais, flores e outras formas, mas nunca à Geometria. Talvez este seja um dos motivos do pouco uso no ensino. Mas o fato deste tipo de atividade atrair a atenção tanto de crianças como de jovens e adultos, faz pensar no método como uma importante opção para o ensino.

Outra contribuição dessa metodologia pode ser na educação de pessoas com problemas de visão, pois com a manipulação envolvida no *Origami*, os elementos geométricos podem ser melhor compreendidos.

Este trabalho é uma pequena parte de um universo que há para ser estudado. Mas o intuito deste trabalho foi mostrar a Matemática escondida numa simples dobra, mostrando assim, mais um material para o escasso campo do ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] ABE, Hisashi, *Sugoizô Origami*, Nippon Hyoronsha Co. Ltd., Tóquio, 2003.
- [2] CAVACAMI, Eduardo, *Aplicações do Origami com recortes como formas de ensino*, Trabalho de Graduação, UFSCar, 2007.
- [3] CAVACAMI, Eduardo e FURUYA, Yolanda K.S., *Explorando Geometria com Origami*, Oficina apresentada na IV Bienal da SBM, em Maringá, 2008. Disponível em <http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami2008.pdf>
- [4] HULL, Thomas, *Origami Mathematics* — <http://mars.wnec.edu/~th297133/origamimath.html>
- [5] KNOTT, Ron. *Some Solid (Three-dimensional) Geometrical Facts about the Golden Section*. Publicado 1996 e atualizado em 2007. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html>.
- [6] LANG, Robert J. *Origami and Geometric Constructions* — http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf.
- [7] PEDONE, Nelma M.D., *Poliedros de Platão*, R.P.M. 15, Sociedade Brasileira da Matemática, Rio Grande. CD-Rom com 60 edições da Revista do Professor de Matemática.